Задачи по представлениям групп к 21 ноября 2005

1. Цель следующих задач — вычисление характеров знакопеременной группы $\mathfrak{A}_n \subset S_n$. Для представления U группы S_n будем обозначать $U' := U \otimes \mathrm{sgn}$. Выберем какой-нибудь элемент $t \in S_n - \mathfrak{A}_n$ и будем говорить, что представление $(\tilde{\rho}, W)$ группы $\mathfrak{A}_n$ *сопряжено* представлению (ρ, W), если $\tilde{\rho}(a) = \rho(tat^{-1})$ для всех $a \in \mathfrak{A}_n$. Пусть U — неприводимое представление S_n, и W — его ограничение на $\mathfrak{A}_n$. Докажите, что
a) либо U неизоморфно U', и тогда W неприводимо и изоморфно $\tilde{W}$, а $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{A}_n}^{S_n} W \simeq U \oplus U'$,
b) либо $U \simeq U'$, а $W = W_1 \oplus W_2$, где W_1 и W_2 неприводимы и сопряжены, но неизоморфны, и $\mathrm{Ind}_{\mathfrak{A}_n}^{S_n} W_1 \simeq \mathrm{Ind}_{\mathfrak{A}_n}^{S_n} W_2 \simeq U$.
c) Всякое неприводимое представление $\mathfrak{A}_n$ однозначно получается одним из этих двух способов (естественно, в первом случае U и U' ограничиваются в одно и то же W).

2. Пусть $c \subset \mathfrak{A}_n$ — класс сопряженности. Докажите, что
a) либо c является классом сопряженности в S_n,
b) либо $c \sqcup tct^{-1}$ является классом сопряженности в S_n (такие классы называются *расщепимыми*).
c) Число расщепимых классов равно числу неприводимых представлений U группы S_n, таких что $U \simeq U'$. Оно же равно числу диаграмм Юнга, симметричных относительно диагонали, т.е. $\lambda = \lambda^*$.

3. Пусть $\lambda = \lambda^*$ — симметричное разбиение, и $p_1 = 2\lambda_1 - 1$, $p_2 = 2\lambda_2 - 3$, $p_3 = 2\lambda_3 - 5, \ldots$ — длины крюков диагональных элементов его диаграммы Юнга. Пусть $U_\lambda|_{\mathfrak{A}_n} = W_\lambda^1 \oplus W_\lambda^2$, и χ_λ^1 (соотв. χ_λ^2) — характер W_λ^1 (соотв. W_λ^2). Пусть c и c' — пара расщепимых классов сопряженности $\mathfrak{A}_n$, состоящих из циклов нечетных длин $q_1 > q_2 > \ldots > q_r$. Мы докажем следующую формулу Фробениуса:
i) Если $(q_1, q_2, \ldots) \neq (p_1, p_2, \ldots)$, то $\chi_\lambda^1(c) = \chi_\lambda^2(c) = \chi_\lambda^1(c') = \chi_\lambda^2(c') = \frac{1}{2}\chi_\lambda(c \sqcup c')$;
ii) Если же $(q_1, q_2, \ldots) = (p_1, p_2, \ldots)$, то $\chi_\lambda^1(c) = \chi_\lambda^2(c') = x$, и $\chi_\lambda^1(c') = \chi_\lambda^2(c) = y$, где $x, y = \frac{1}{2}\left((-1)^m \pm \sqrt{(-1)^m q_1 \cdot \ldots \cdot q_r}\right)$,
а $m = \frac{1}{2}(n-r) = \frac{1}{2}\sum(q_i - 1)$.
Для начала выведем *ii)* в предположении, что χ_λ^1 и χ_λ^2 принимают одинаковые значения на всех классах сопряженности $\mathfrak{A}_n$, за исключением c и c' (в частности, и *i)* последует автоматически). Докажите тогда, что
a) x, y вещественны, если m четно, и $x = \bar{y}$, если m нечетно.
b) $|x - y|^2 = q_1 \cdot \ldots \cdot q_r$. (Выведите это из $(\chi_\lambda^1 - \chi_\lambda^2, \chi_\lambda^1 - \chi_\lambda^2) = 2$).
c) $(p_1, p_2, \ldots) = (q_1, q_2, \ldots)$, и $x + y = (-1)^m$ (Это следует из задачи 7 к 3 октября).

4. Теперь докажем формулу индукцией по n, а для фиксированного n возьмем нечетное разбиение $(q_1, q_2, \ldots)$ с наименьшим q_1, для которого значения характеров на c, c' (с длинами циклов, равными q_i) не равны предписанным формулой Фробениуса. Если $r = 1$, то $q_1 = n = 2m + 1$, и диаграмма с такими длинами крюков — это $\lambda = (m + 1, 1, \ldots, 1)$. По индукции, предположение задачи 3 применимо к $\chi_\lambda^1, \chi_\lambda^2$. Если же $r > 1$, то рассмотрим вложение $H = \mathfrak{A}_{q_1} \times \mathfrak{A}_{n-q_1} \subset G = \mathfrak{A}_n$. Пусть $W_1, \tilde{W}_1$ — представления $\mathfrak{A}_{q_1}$, отвечающие симметричному разбиению $(\frac{1}{2}(q_1 - 1), 1, \ldots, 1)$. Пусть W_2 — одно из двух неприводимых представлений $\mathfrak{A}_{n-q_1}$, отвечающих симметричному разбиению с длинами диагональных крюков $q_2, \ldots, q_r$. Наконец, пусть $X = \mathrm{Ind}_H^G(W_1 \boxtimes W_2)$, $\tilde{X} = \mathrm{Ind}_H^G(\tilde{W}_1 \boxtimes W_2)$. Докажите, что X и $\tilde{X}$ в самом деле сопряжены, а их характеры χ и $\tilde{\chi}$ принимают одинаковые значения на всех парах расщепимых классов сопряженности за исключением c и c'; и вычислите значения этих характеров на c и c'.

5. a) Положим $\theta = \chi - \tilde{\chi}$. Докажите, что $(\theta, \theta) = 2$.

b) Разложим X и $\tilde{X}$ на неприводимые. Докажите, что $X = Y \oplus W_\lambda^1$ и $\tilde{X} = Y \oplus W_\lambda^2$ для некоторого самосопряженного Y и некоторого симметричного разбиения λ числа n.

c) Примените задачу 3 к характерам $\chi_\lambda^1, \chi_\lambda^2$ представлений W_λ^1, W_λ^2 для завершения доказательства.