Задачи по представлениям групп к 24 октября 2005

1. Группа $GL(n,\mathbb{F}_q)$ действует на множестве X_k^q k-мерных линейных подпространств n-мерного векторного пространства над $\mathbb{F}_q$, а стало быть, и в $\mathbb{C}[X_k^q]=:T_k^q$.
a) Докажите, что однородные пространства X_k^q и X_{n-k}^q *не*изоморфны, но представления $\mathbb{C}[X_k^q]$ и $\mathbb{C}[X_{n-k}^q]$ изоморфны.
b) Докажите, что $\dim \operatorname{Hom}_{GL(n,\mathbb{F}_q)}(T_k^q,T_l^q)=1+\min(k,l,n-k,n-l)$.
c) Докажите, что T_k^q раскладывается в прямую сумму неприводимых представлений следующим образом: $T_k^q=\bigoplus_{i=0}^{\min(k,n-k)}U_i^q$ (для некоторых неприводимых $U_0^q,\ldots,U_{[\frac{n}{2}]}^q$).

2. Пусть $\delta_L\in T_k^q$ — характеристическая функция подпространства $L\in X_k^q$. Определим операторы $\varphi_k:\ T_k^q\to T_{k+1}^q,\ \varphi_k^*:\ T_{k+1}^q\to T_k^q$ следующим образом: $\varphi_k(\delta_L)=\sum_{X_{k+1}^q\ni L'\supset L}\delta_{L'}$, $\varphi_k^*(\delta_{L'})=\sum_{X_k^q\ni L''\subset L'}\delta_{L''}$. По аналогии с задачей 3 к 19 сентября, определим $T^q=\bigoplus_{0\le k\le n}T_k^q$, $\varphi=q^{\frac{1-n}{2}}\bigoplus_k\varphi_k,\ \varphi^*=\bigoplus_k\varphi_k^*$ и, наконец, $H|_{T_k^q}=2k-n$.
a) Проверьте, что

$$[\varphi,\varphi^*]=\frac{q^{\frac{H}{2}}-q^{-\frac{H}{2}}}{q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}}},\ [H,\varphi]=2\varphi,\ [H,\varphi^*]=-2\varphi^*.$$

b) Определим еще $\psi_k^q:\ T_k^q\to T_k^q$ формулой $\psi_k^q(\delta_L)=\sum_{X_k^q\ni L':\ \dim(L\cap L')=k-1}\delta_{L'}$. Докажите, что $U_i^q\subset T_k^q$ является собственным подпространством ψ_k^q, и вычислите собственное значение.
Указание: если $\psi^q=\oplus_k\psi_k^q$, то $\psi^q=q^{\frac{n-1}{2}}\varphi\varphi^*-B$, где $B|_{T_k^q}=\frac{q^k-1}{q-1}$.

3. Положим $n!_q:=\prod_{k=1}^n\frac{q^k-1}{q-1}$, $\binom{n}{k}_q:=\frac{n!_q}{k!_q(n-k)!_q}$.
a) Докажите, что предел $n!_q$ при $q\to 1$ равен $n!$, а стало быть, предел $\binom{n}{k}_q$ равен числу сочетаний $\binom{n}{k}$.
b) Докажите, что $\sharp GL(n,\mathbb{F}_q)=q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q-1)^n n!_q$, а $\sharp X_k^q=\binom{n}{k}_q$.
c) Выведите из пункта b), что $\binom{n}{k}_q=\binom{n-1}{k}_q+q^{n-k}\binom{n-1}{k-1}_q=q^k\binom{n-1}{k}_q+\binom{n-1}{k-1}_q$.
d) Пусть переменные x,y коммутируют следующим образом: $yx=q\cdot xy$. Докажите, что $(x+y)^n=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}_q x^ky^{n-k}$.

4. Пусть $\mathcal{F}\ell$ — множество полных флагов $0\subset V^1\subset\ldots\subset V^{n-1}\subset\mathsf{k}^n$ в n-мерном векторном пространстве над полем k. Докажите, что число $GL(n,\mathsf{k})$-орбит в $\mathcal{F}\ell\times\mathcal{F}\ell$ равно $n!$.
Указание: Паре флагов $(V^\bullet,W^\bullet)$ сопоставим $n\times n$-матрицу $A(V^\bullet,W^\bullet)=(a_{ij})$ из нулей и единиц следующим образом: $a_{ij}:=\dim\left(\frac{V^i\cap W^j}{V^{i-1}\cap W^j+V^i\cap W^{j-1}}\right)$. Заметьте, что сумма в каждой строке и в каждом столбце равна 1, т.е. (a_{ij}) — матрица некоторой перестановки. Докажите, что

пара $(V^\bullet, W^\bullet)$ переводится в пару $({}'V^\bullet, {}'W^\bullet)$ некоторым линейным оператором если и только если $A(V^\bullet, W^\bullet) = A({}'V^\bullet, {}'W^\bullet)$.
Если A — матрица перестановки $\sigma \in S_n$, а $v_1, \ldots, v_n$ — базис k^n, то пример пары $(V^\bullet, W^\bullet)$ с такой матрицей — это $V^i = \langle v_1, \ldots, v_i \rangle$, $W^j = \langle v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(j)} \rangle$, $1 \le i, j \le n$. Пусть $B \subset GL(n, \mathsf{k})$ — подгруппа верхнетреугольных матриц. Можно переформулировать доказанное следующим образом: матрицы перестановок $\sigma \in S_n \subset GL(n, \mathsf{k})$ служат естественными представителями двойных классов смежности $B \backslash GL(n, \mathsf{k}) / B$ (*Разложение Брюа*).