Задачи по представлениям групп к 31 октября 2005

1. Пусть $B \subset G = GL(n, \mathbb{F}_q)$ — подгруппа верхнетреугольных матриц, и $W = \mathrm{Ind}_B^G \mathbb{C} = \mathbb{C}[\mathcal{F}\ell]$. Из задачи 4 к 24 октября следует, что размерность алгебры $\mathcal{H}_q := \mathrm{End}_G(W)$ равна $n!$. Эта алгебра называется *алгеброй Ивахори-Гекке*, и цель задач 1–3 — изучение этой алгебры. Оказывается, что $\mathcal{H}_q$ является деформацией групповой алгебры $\mathbb{C}[S_n]$, но кроме того, еще и изоморфна $\mathbb{C}[S_n]$, а потому ее неприводимые представления — это U_λ, где λ — разбиение n. Далее, как $G \times \mathcal{H}_q$-модуль W раскладывается в прямую сумму неприводимых $W = \bigoplus_\lambda W_\lambda \boxtimes U_\lambda$, а размерность $\dim W_\lambda$ задается q-аналогом формулы крюков: $\dim W_\lambda = q^{a(\lambda)}(1-q)\dots(1-q^n)\prod_{x\in\lambda}(1-q^{h(x)})^{-1} =: K_\lambda(q)$ (*многочлен Костки*); здесь $a(\lambda) = \sum_{i\geq 1}(i-1)\lambda_i$.

a) Для начала докажите, что $\mathcal{H}_q$ изоморфна подалгебре в групповой алгебре $\mathbb{C}[G]$, образованной функциями, инвариантными относительно и левых, и правых сдвигов на B.

b) Докажите, что $\mathcal{H}_q$ изоморфна алгебре G-инвариантных функций на $\mathcal{F}\ell\times\mathcal{F}\ell$ с умножением *свертки*: $f_1\star f_2(x,y) = \sum_{z\in\mathcal{F}\ell} f_1(x,z)f_2(z,y)$. Для $w \in S_n$ обозначим через $T_w \in \mathcal{H}_q$ дельта-функцию соответствующей G-орбиты на $\mathcal{F}\ell \times \mathcal{F}\ell$. Тем самым, $\{T_w,\ w \in S_n\}$ образуют базис в $\mathcal{H}_q$.

2. a) Пусть $\ell(w)$ — число беспорядков перестановки $w \in S_n$. Фиксируем флаг $V^\bullet \in \mathcal{F}\ell$. Докажите, что число флагов $'V^\bullet$, находящихся в положении w относительно $V^\bullet$ равно $q^{\ell(w)}$.

b) Докажите, что $\sum_{w\in S_n} q^{\ell(w)} = n!_q = (q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots(q-1)/(q-1)^n$. (Посчитайте число всех флагов двумя способами.)

3. a) Пусть $w, x \in S_n$ и $\ell(wx) = \ell(w)+\ell(x)$. Докажите, что тогда $T_wT_x = T_{wx}$.

b) Для $1 \leq i \leq n-1$ обозначим через $s_i \in S_n$ транспозицию, переставляющую i и $i+1$. Пусть $\ell(s_iw) < \ell(w)$ (тогда $\ell(s_iw) = \ell(w)-1$). Докажите, что $T_{s_i}T_w = (q-1)T_w + qT_{s_iw}$. (Это соотношение при $q \to 1$ превращается в $T_{s_i}T_w = T_{s_iw}$, т.е. алгебра Ивахори-Гекке при $q \to 1$ превращается в групповую алгебру симметрической группы.)

4. Во всех следующих задачах $n = 2$ и $G = GL(2, \mathbb{F}_q)$. Пусть $N \subset G$ — подгруппа строго верхнетреугольных матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & \star \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Докажите, что неприводимое представление V группы G каспидально тогда и только тогда, когда в нем нет N-инвариантов: $V^N = 0$.

5. Докажите, что ограничение каспидального G-представления на B неприводимо.

6. Фиксируем нетривиальный (аддитивный) характер $\psi: N \to \mathbb{C}$. Пусть V — неприводимое представление G, и $V^\psi \subset V$ — подпространство векторов, собственных относительно N с собственным значением ψ.
a) Докажите, что если $\dim V > 1$, то $\dim V^\psi = 1$ (такие представления называются *невырожденными*), а если $\dim V = 1$ (т.е. $V = \mu(\det)$), то $V^\psi = 0$ (такие представления называются *вырожденными*).
b) Докажите, что $\mathrm{Ind}_N^G(\psi) = \bigoplus V$ — сумма по всем невырожденным неприводимым представлениям с кратностью 1 (это индуцированное представление называют *моделью Уиттекера*).
c) Вычислите характер $\mathrm{Ind}_N^G(\psi)$.