НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях.
Экзамен 11.12.2005

Заметим, что не обязательно решать все задачи для отличной оценки.

Задача 1. Доказать, что множество пар (u, v) единичных взаимно ортогональных векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$ является многообразием.

Задача 2. Метрика на поверхности $\{(u,v) | u^2 + v^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ задана формулой

$$ds^2 = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2}(du^2 + dv^2)\,.$$

Вычислить площадь единичного круга с центром в точке $(0, 0)$ на этой поверхности. Единичный круг — это множество точек, удалённых от центра на расстояние (в данной метрике) меньшее, чем 1.

Задача 3. Вычислить производную Ли дифференциальной 2-формы

$$y\,dx \wedge dy + x\,dy \wedge dz + (x^2 + y^2 + z^2)dz \wedge dx$$

вдоль векторного поля $(x + y^2)\frac{\partial}{\partial x} + (y + z^2)\frac{\partial}{\partial y} + (z + x^2)\frac{\partial}{\partial z}$.

Задача 4. Бутылка Клейна — это поверхность, получаемая отождествлением компонент $S^1 \times \{0\}$ и $S^1 \times \{1\}$ цилиндра $S^1 \times I$ $(I = [0, 1])$ по отображению $(\varphi, 0) \mapsto (-\varphi, 1)$. Вычислить когомологии де Рама бутылки Клейна.

Задача 5. Вычислить $\int_M \omega$, где

$$\omega = (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz,$$

а $M \subset \mathbb{R}^3$ является параметризованной кривой $x = a\sin^2 t$, $y = 2a\cos t\,\sin t$, $z = a\cos^2 t$, $0 \le t \le 2\pi$.

Задача 6. Пусть e_1, e_2, e_3 и e_4 — радиус-векторы вершин правильного тетраэдра, вписанного в единичную сферу с центром в начале координат. Вычислить среднее по сфере функции $\prod\limits_{i=1}^{4}(x, e_i)$, где $(\cdot,\cdot)$ обозначает стандартное скалярное произведение.

Задача 7. Пусть φ гладкая функция на замкнутом (то есть компактном, без края) многообразии M^n, такая что $d\varphi(x) \neq 0$ при $\varphi(x) = 0$, и пусть ω дифференциальная n-форма на M^n. Доказать, что при достаточно малых c множество $M_c := \{x \in M^n | \, \varphi(x) \le c\}$ является гладким многообразием с краем. Доказать, что функция

$$F(c) = \int\limits_{\{\varphi(x) \le c\}} \omega$$

является гладкой (класса C^∞). Показать, что

$$F'(0) = \int\limits_{\{\varphi(x) = 0\}} \eta\,,$$

где форма η конструктивно определяется по форме ω (в частности, если форма ω гладко зависит от каких-то параметров, то и форма η гладко зависит от них). Описать построение формы η по форме ω.

Указание: полезно для начала рассмотреть аналогичную задачу, в которой $M^n = \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = x_1$.