НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях.
Экзамен 5.03.2006

Каждая задача оценивается в три балла. Оценки удовлетворительно, хорошо, отлично соответствуют 5, 10, 15 баллам.

Задача 1. Пусть $f : \mathrm{SO}(n) \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ сопоставляет каждой ортогональной матрице её первый столбец. Доказать, что f гладкое отображение, и что у него все точки регулярны. Найти прообраз $f^{-1}(y)$.

Задача 2. Доказать, что подмножество $\{A | \det(A+I) = 0\}$ группы $\mathrm{SO}(3)$ диффеоморфно $\mathbb{R}P^2$.

Задача 3. Пусть метрика имеет вид

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2.$$

Найти углы в криволинейном треугольнике, образованном пересечением кривых

$$u = \pm\frac{1}{2}av^2, \quad v = 1.$$

Задача 4. Доказать, что для любой дифференциальной формы ω и векторного поля X имеет место тождество

$$dL_X\omega = L_X d\omega.$$

Задача 5. Найти интеграл

$$\int_M \omega,$$

где $\omega = (y^2 + z^2)dx + (x^2 + z^2)dy + (x^2 + y^2)dz$, а M задано уравнениями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx, \quad x^2 + y^2 = Rx.$$

Задача 6. Вычислить когомологии де Рама $\mathbb{R}P^2$.