НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 1.
Касательные векторы и пространства, векторные поля. 16.09.2005

Задача 1. Является ли $(1,-4,1)$ касательным вектором к единичной сфере $\{x^2+y^2+z^2=1\}\subset\mathbb{R}^3$ в точке $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$? Если да, то записать его в сферических координатах на сфере: широта (отсчитываемая, скажем, от экватора $z=0$) и долгота (отсчитываемая, скажем, от оси Ox в положительном (в плоскости Oxy) направлении).

Задача 2. Для $G=SL(n),O(n)\subset\mathrm{Mat}(n,n)\cong\mathbb{R}^{n^2}$ и $X\in G$ написать условие на матрицу $Y\in T_X\mathrm{Mat}(n,n)=\mathrm{Mat}(n,n)$, означающее, что $Y\in T_XG$.

Задача 3*. Придумать определение производной векторного поля по векторному полю и вычислить ее.

Задача 4*. Пусть множество $M=\{f=0\}$ ($f:U\longrightarrow\mathbb{R}^k$, $U\subset\mathbb{R}^n$, k можно взять, например, равным 1) — многообразие почти всюду, то есть в окрестности любой точки из открытого всюду плотного множества. Пример: $M_0=\{xy(x+y)(x-zy)=0, z>0\}$. Придумать определение гладкого векторного поля на таком множестве M. Существуют ли гладкие векторные поля на множестве M_0, не обращающиеся в ноль на оси Oz?

Задача 5*. Построить на стандартной трехмерной сфере $\mathbb{S}^3$ три линейно независимых в каждой точке векторных поля.

Задача 6. Доказать, что если два векторных поля касательные к некоторому подмногообразию, то их коммутатор тоже касательное к этому подмногообразию поле.

Задача 7. Пусть X,Y векторные поля, f,g гладкие функции. Доказать, что

$$[fX,gY]=fg[X,Y]-gY(f)X+fX(g)Y.$$

Задача 8. Построить интегральные траектории поля

$$y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}$$

на плоскости.

Задача 9. Пусть X векторное поле на торе T^2, координаты которого в стандартных угловых координатах постоянны. Для каких X их интегральные траектории на торе являются замкнутыми кривыми?