НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 10.
Последовательность Майера-Виеториса. 2.12.2005

Задача 1. Пусть многообразие M представлено в виде объединения двух открытых множеств U и V. Отображения вложения

$$i_U : U \longrightarrow M \quad \text{и} \quad i_V : V \longrightarrow M$$

индуцируют отображения ограничения форм

$$i_U^* : \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(U) \quad \text{и} \quad i_V^* : \Omega^*(M) \longrightarrow \Omega^*(V).$$

Рассмотрим отображение

$$j : \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \longrightarrow \Omega(U \cap V),$$

при котором (ω, τ) переходит в ограничение формы $\tau - \omega$ на $U \cap V$.

Докажите, что последовательность

$$0 \longrightarrow \Omega^*(M) \xrightarrow{(i_U, i_V)} \Omega^*(U) \oplus \Omega^*(V) \xrightarrow{j} \Omega^*(U \cap V) \longrightarrow 0$$

является точной.

Задача 2. Докажите, что короткая точная последовательность из предыдущей задачи индуцирует длинную точную последовательность в когомологиях (так называемую последовательность Майера-Виеториса)

$$\ldots \longrightarrow H^k(M) \longrightarrow H^k(U) \oplus H^k(V) \longrightarrow H^k(U \cap V) \longrightarrow H^{k+1}(M) \longrightarrow \ldots$$

Задача 3. С помощью последовательности Майера-Виеториса посчитайте когомологии $\mathbb{S}^n$.

Задача 4. С помощью последовательности Майера-Виеториса посчитайте когомологии $\mathbb{T}^n$.

Задача 5. Говорят, что покрытие многообразия M хорошее, если пересечение любого набора элементов покрытия диффеоморфно $\mathbb{R}^n$ или является пустым множеством. Докажите, что если M обладает конечным хорошим покрытием, а N произвольное гладкое многообразие, то верна теорема Кюннета:

$$H^n(M \times N) = \bigoplus_{k+l=n} H^k(M) \otimes H^l(N).$$

Задача 6. Докажите, что когомологии многообразия, обладающего конечным хорошим покрытием, конечномерны.