НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 2.
Риманова метрика. 23.09.2005

Задача 1. Докажите, что в подходящих координатах индуцированная из $\mathbb{R}^3$ метрика на поверхности вращения имеет вид

$$ds^2 = du^2 + g(u)dv^2.$$

Задача 2. Найдите описанные выше координаты для тора.

Задача 3. Вычислить метрику на стандартной единичной сфере в $\mathbb{R}^3$ в координатах u и v, возникающих при стереографической проекции. Записать ее через $z = u + iv$, $\bar{z} = u - iv$.

Задача 4. На параметрической поверхности

$$\vec{\mathbf{r}} = (u\cos v, u\sin v, av)$$

найти угол между пересекающимися кривыми

$$u + v = 0, \quad \text{и} \quad u - v = 0.$$

Задача 5. Проверьте, что матричнозначная функция

$$\frac{R^2}{(1+u^2+v^2)^2}\begin{pmatrix} 1+v^2 & -uv \\ -uv & 1+u^2 \end{pmatrix}$$

задает метрику на плоскости (u, v) и найдите длину кривой $u = v$.

Задача 6. Найдите кривые, которые делят пополам углы между координатными линиями на параболоиде вращения

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = \frac{1}{2}u^2.$$

Задача 7. Пусть метрика на поверхности в локальных координатах имеет вид

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2.$$

Найти площадь треугольника, образованного пересечением кривых

$$u = \pm av, \quad v = 1.$$

Задача 8. Доказать, что отображение

$$\varphi = v + \operatorname{arctg}\rho, \quad r^2 = \rho^2 + 1$$

коноида

$$x = \rho\cos v, \quad y = \rho\sin v, \quad z = \rho + v$$

на гиперболоид вращения

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = \sqrt{r^2 - 1}$$

является изометрией.