НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 3.
Риманова метрика, интеграл первого рода 30.09.2005

Задача 1. Найдите площадь тора вращения в индуцированной метрике.

Задача 2. В модели плоскости Лобачевского в верхней полуплоскости вычислить площадь треугольника, ограниченного прямыми

$$x = -a, \quad x = a, \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Задача 3. Рассмотрим многообразие невырожденных $n\times n$-матриц $\mathrm{GL}(n) \subset \mathrm{Mat}(n,n) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. На этом многообразии существует естественная групповая операция умножения: точками многообразия $\mathrm{GL}(n)$ являются невырожденные матрицы, а их мы можем умножать. (Заметим, что подобное многообразие с умножением называется *группой Ли,* если операции умножения $M\times M \longrightarrow M$ и нахождения обратного элемента $M \longrightarrow M$ являются гладкими отображениями.) Легко видеть, что касательное пространство $T_E\mathrm{GL}(n)$ в единичной матрице E совпадает с пространством всех матриц $\mathrm{Mat}(n,n)$. Пусть $v \in T_E\mathrm{GL}(n)$ произвольный вектор. Определим тогда векторное поле $\mathbf{v}$ на всей группе $\mathrm{GL}(n)$ так: значение этого поля в точке $A \in \mathrm{GL}(n)$ равно

$$\mathbf{v}(A) = v \cdot A.$$

Такое векторное поле называется *правоинвариантным.* По своему определению такое поле полностью задается своим значением v в единице E, $\mathbf{v}(E) = v$.

Докажите, что коммутатор двух таких правоинвариантных полей $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ снова будет правоинвариантным полем, назовём его $\mathbf{x}$, и выразите его значение в единице $x = \mathbf{x}(E)$ через v и w. (Эта операция $(v,w) \mapsto x$ называется *скобкой Ли* или *коммутатором,* и обозначается $[v,w]$. Она обладает некоторыми свойствами, которые обозначают, что касательное пространство к группе Ли удовлетворяет аксиомам *алгебры Ли.* Теория групп и алгебр Ли оказалась важнейшим разделом математики, имеющим применения в самых разнообразных областях.)

Задача 4. Доказать, что то же самое, что и в предыдущей задаче, верно и для других групп Ли: $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{SL}(n)$, ...

Задача 5*. Рассмотрим группу Ли $\mathrm{SO}(n)$. Введем на касательном пространстве к единице $T_E\mathrm{SO}(n)$ скалярное произведение по формуле

$$(X,Y)_E = \mathrm{tr} XY^T, \quad X,Y \in T_E\mathrm{SO}(n).$$

Тогда можно определить скалярное произведение в произвольной точке $A \in \mathrm{SO}(n)$ следующим образом: для данных векторов $X, Y \in T_A\mathrm{SO}(n)$ найдем правоинвариантные векторные поля $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$, такие что $\mathbf{v}(A) = X$ и $\mathbf{w}(A) = Y$, тогда искомое скалярное произведение определяется по формуле $(X,Y)_A = (v,w)_E$, где $v = \mathbf{v}(E)$ и $w = \mathbf{w}(E)$, то есть скалярное произведение из единицы «разносится из единицы по всей группе». Это задает метрику на всей группе $\mathrm{SO}(n)$. Ясно, что подобная конструкция работает и для других групп Ли.

Найдите объём группы $\mathrm{SO}(3)$ для такой метрики.