НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 4.
Тензоры. 7.10.2005

Задача 1. Скалярное произведение задано матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Поднять и опустить индекс у тензора $e_3 \otimes e^1 + e_4 \otimes e^2$.

Задача 2. Тензор $(e_1 + e_2) \otimes (2e^1 - e^3)$ задает оператор A. Какой тензор задает оператор A^2?

Задача 3. Найти значение тензора $e_2 \otimes e^1 + (e_1 + 3e_3) \otimes e^2$ на паре $e^1 + e^2 + e^3$ и $e_1 + 5e_2 + 4e_3$.

Задача 4. Выразить через след и определитель матрицы A величины $\operatorname{tr} A \otimes A$ и $\det A \otimes A$.

Задача 5*. Пусть M^n гладкое компактное риманово многообразие с краем, $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывная, а $\varphi : M^n \longrightarrow \mathbb{R}$ гладкая функции. Положим $M_c = \{x | \varphi(x) \leqslant c\}$.

Предположим, что $c_0 \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\varphi(x) = c_0 \Longrightarrow d\varphi(x) \neq 0.$$

Тогда M_{c_0} — многообразие с краем, и M_c — тоже многообразие с краем для всех c их некоторой окрестности c_0.

Пусть

$$F(c) := \int_{M_c} f\, dV.$$

Утверждение: $F(c)$ гладкая функция от c и производная $\dfrac{dF(c)}{dc}$ может быть представлена в виде интеграла

$$\int_{\partial M_c} \tilde{f}\, dV$$

от некоторой функции $\tilde{f}$. Найти $\tilde{f}$.

Задача 6*. Пусть $\varphi(x, \lambda)$ гладкая функция на $M^n \times \mathbb{R}$, а λ_0 такое, что

$$\varphi(x, \lambda_0) = 0 \Longrightarrow d_x\varphi \neq 0.$$

Тогда $M_\lambda = \{x | \varphi(x, \lambda) \leqslant 0\}$ является многообразием с краем при λ достаточно близком к λ_0.

Утверждение. $\dfrac{d}{d\lambda} \int_{M_\lambda} f\, dV = \int_{\partial M_\lambda} \tilde{f}\, dV$.

Найти $\tilde{f}$.