НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 5.
Дифференциальные формы. 14.10.2005

Задача 1. Доказать, что если векторы $v_1, \dots, v_p \in V$ линейно зависимы, то

$$T(v_1, \dots, v_p) = 0$$

для любой формы $T \in \Lambda^p(V^*)$.

Задача 2. Записать форму $f(x^2+y^2)(x\,dx + y\,dy)$ в полярных координатах.

Задача 3. Найти $f^*\omega$, если

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2},$$

а f отображение

$$(x, y) \mapsto (x^2 - y^2, 2xy).$$

Задача 4. Вычислить внешний дифференциал формы

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Задача 5. Вычислить внешний дифференциал формы

$$z^2\,dx \wedge dy + (z^2 + 2y)\,dx \wedge dz.$$

Задача 6. Пусть Ω дифференциальная p-форма, ω дифференциальная 1-форма, не равная нулю. Доказать, что Ω представима в виде $\Omega = \theta \wedge \omega$ тогда и только тогда, когда $\Omega \wedge \omega = 0$.

Задача 7. Пусть

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}.$$

Найти $d\omega$ и $\int\limits_{x^2+y^2=1} \omega$, вывести из этого, что ω замкнута, но не точна в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Задача 8. Доказать, что форма $\omega \in \Omega^1(\mathbb{S}^1)$ точна тогда и только тогда, когда $\int\limits_{\mathbb{S}^1} \omega = 0$.

Задача 9. Пусть $N \subset M$ подмногообразие, тогда формы на M можно ограничивать на N. Доказать, что ограничение замкнутой (точной) формы будет замкнутым (точным).

Задача 10. Пусть f — функция на многообразии M^n. Доказать, что $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ тензором (типа (0,2)), вообще говоря, не является.

Задача 11. Пусть f — функция на многообразии M^n. Доказать, что в критических точках функции f (то есть в точках, в которых $\dfrac{\partial f}{\partial x^i} = 0$) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ является тензором типа (0,2).

Задача 12. Пусть $v^i = v^i(x)$ — векторное поле на многообразии M^n. Доказать, что $\dfrac{\partial v^i}{\partial x^j}$ тензором (типа (1,1)), вообще говоря, не является.

Задача 13. Пусть $\alpha_i = \alpha_i(x)$ — ковекторное поле на многообразии M^n. Доказать, что $\dfrac{\partial \alpha_i}{\partial x^j}$ тензором (типа (0,2)), вообще говоря, не является.

Задача 14. Пусть $v^i = v^i(x)$ — векторное поле на многообразии M^n. Доказать, что в точках, в которых v^i обращается в ноль, $\dfrac{\partial v^i}{\partial x^j}$ является тензором типа (1,1).

Задача 15. Доказать, что дифференциальная 2-форма $x \cdot dy \wedge dz + y \cdot dz \wedge dx + z \cdot dx \wedge dy$ на $\mathbb{R}^3$ инвариантна относительно всех ортогональных замен координат. Выяснить, как она ведет себя при гомотетиях пространства $\mathbb{R}^3$.