НМУ, 2 курс, анализ на многообразиях. Листок 8.
Когомологии де Рама. 4.11.2005

В данном листке под когомологиями подразумеваются исключительно когомологии де Рама. При их вычислении запрещено использовать утверждения, не доказанные на лекциях.

Задача 1. Доказать, что все группы когомологий компактного многообразия конечномерны.

Задача 2. Доказать, что компактное ориентируемое многообразие без края не является гомотопически эквивалентным точке.

Задача 3. Доказать, что предыдущее утверждение верно, даже если опустить требование ориентируемости.

Задача 4. Пусть есть замкнутая k-форма $\omega = \sum \omega_{i_1,\ldots,i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ на пространстве $\mathbb{R}^n$. Написать в явном виде $k-1$-форму, дифференциал которой равен ω.

Задача 5. Вычислить когомологии $\mathbb{R}^n$ с s выколотыми точками.

Задача 6. Доказать, что все когомологические классы на $\mathrm{SO}(n)$ представимы замкнутыми лево- (или право-) инвариантными формами.

Задача 7. Доказать, что все когомологические классы на $\mathbb{T}^n$ представимы замкнутыми инвариантными (относительно сдигов) формами.