ЭКЗАМЕН 4 ДЕКАБРЯ 2005 Г.

Пожалуйста, соблюдайте следующие правила оформления работы:

1) *Работа должна иметь титульный лист, на котором написана фамилия и имя сдающего экзамен* ***И БОЛЕЕ НИЧЕГО НЕ НАПИСАНО***
2) *Решение каждой задачи или пункта, в котором требуется ответ, должно начинаться со слова "Ответ", за которым следует ответ. Это правило нужно соблюдать, даже если в тексте решения ответ и так встречается.*

Время на решение задач — 4 часа. Можно пользоваться книгами, записями лекций и т.п. Забытые определения можно спрашивать у дежурного по аудитории.

Задача 1. Функция а) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, б) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ удовлетворяет при всех x, y неравенству $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^2$. Докажите, что $f = const$.

Задача 2. Для произвольного $p \in \mathbb{R}$ найдите наибольшую возможную площадь треугольника OAB, где O — начало координат, A имеет координаты (p, p^3), а B — произвольная точка на дуге OA графика функции $y = x^3$.

Задача 3. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos^n(\pi x/2)$ равномерно сходится при $x \in [0, 1]$.

Задача 4. а) Сколько решений имеет уравнение $y = xe^y$ (y — неизвестная, x — параметр) при различных $x \in \mathbb{R}$? б) Пусть $f(x)$ — наименьшее по модулю среди этих решений. Вычислите предел $\lim_{x\to 0} \left(f(x) - \frac{x}{1-x} \right) / x^k$ при всех $k = 0, 1, \ldots$.

Задача 5. Вычислите $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx$ при всех $a, b > 0$.

Примечание. $\int_0^{+\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{\substack{\varepsilon \to +0 \\ T \to +\infty}} \int_\varepsilon^T$.

Задача 6. Пусть $K \subset [0, 1]$ — канторово множество. а) Существует ли непрерывное отображение $f : K \to [0, 1]$, образ которого — весь отрезок $[0, 1]$? б) Существует ли непрерывное отображение $f : [0, 1] \to K$, образ которого — все множество K ?