ЛЕКЦИЯ 11

Краткое содержание. Линейные нормированные пространства. Производная.

Пусть V — векторное пространство. Функция $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ называется нормой, если

1) $\|v\| \geq 0$ для всех $v \in V$, причем $\|v\| = 0$ равносильно $v = 0$.
2) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$ для всех $v \in V$ и $\lambda \in \mathbb{R}$.
3) $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$.

Очевидно, если $\|\cdot\|$ — норма, то $\varrho(v, w) = \|v - w\|$ — метрика на V.

Предложение 1. *Шар в произвольной норме является выпуклым множеством: если $x, y \in B_r(a)$, то весь отрезок с концами x, y лежит в $B_r(a)$.*

Доказательство. Отрезок это множество $\{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\}$. Без ограничения общности можно считать, что $a = 0$. Тогда $\|tx + (1-t)y\| \leq \|tx\| + \|(1-t)y\| = t\|x\| + (1-t)\|y\| \leq R$. □

Примеры норм:

Пример 1. Функции $\|(x_1, \dots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ и $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty = \max_{i=1}^n |x_i|$ являются, очевидно, нормами на $V = \mathbb{R}^n$. Также нормой является $\|(x_1, \dots, x_n)\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$. Первые два свойства нормы здесь очевидны, а третье следует из такой леммы:

Лемма 1. *Пусть $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда $|\sum_{i=1}^n x_i y_i| \leq \|x\| \, \|y\|$.*

Доказательство. Для всякого $t \in \mathbb{R}$ имеет место неравенство $P(t) = \sum_{i=1}^n (x_i - ty_i)^2 \geq 0$. Следовательно, квадратный трехчлен $P(t) = t^2\|y\|^2 - 2t\sum_{i=1}^n x_i y_i + \|x\|^2$ имеет неположительный дискриминант: $\|x\|^2 \|y\|^2 \geq (\sum_{i=1}^n x_i y_i)^2$. □

Теперь свойство 3 для нормы $\|\cdot\|_2$ получается так: $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$. Можно показать (мы не будем этого делать), что для всякого $p > 1$ функция $\|(x_1, \dots, x_n)\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$ также является нормой на $\mathbb{R}^n$.

Пример 2. Функция $\|f\|_C = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$ является, очевидно, нормой на пространстве $C[0,1]$ непрерывных функций $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Порождаемая этой нормой метрика совпадает с обыкновенной метрикой на $C[0,1]$. Функция $\|f\|_{L_1} = \int_0^1 |f(x)| \, dx$ также является нормой на том же самом пространстве.

Нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ называются эквивалентными, если существуют такие положительные константы m и M, что $m\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq M\|v\|_2$ для всякого $v \in V$.

Предложение 2. *Эквивалентность норм — отношение эквивалентности. Топологии, порожденные в пространстве V эквивалентными нормами, совпадают. Метрические пространства, порожденные на V эквивалентными нормами, одновременно полны или нет.*

Доказательство. Всякая норма эквивалентна самой себе ($m = M = 1$). Если $m\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq M\|v\|_2$, то $\frac{1}{M}\|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq \frac{1}{m}\|v\|_1$ — отношение симметрично. Если $m_{12}\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq M_{12}\|v\|_2$ и $m_{23}\|v\|_3 \leq \|v\|_2 \leq M_{23}\|v\|_3$, то $m_{12}m_{23}\|v\|_3 \leq \|v\|_1 \leq M_{12}M_{23}\|v\|_3$ — отношение транзитивно.

Пусть теперь V_1 — топологическое пространство, порожденное на V нормой $\|\cdot\|_1$, а V_2 — нормой $\|\cdot\|_2$ (как множества пространства V_1 и V_2 совпадают !). Тождественное отображение $\mathrm{id} : V_2 \to V_1$ непрерывно: $\lim_{\|v_1 - v_2\|_2 \to 0} \|v_1 - v_2\|_1 = 0$ по лемме о двух милиционерах. Обратное — также тождественное и также непрерывно. Следовательно, тождественное отображение есть гомеоморфизм V_2 и V_1.

Пусть теперь метрическое пространство V_1 полно и $f : X \to V_2$ — отображение, фундаментальное в точке x_0. Поскольку $\|f(x_1) - f(x_2)\|_1 \leq M\|f(x_1) - f(x_2)\|_2$, отображение f фундаментально также и как отображение $f : X \to V_1$ — следовательно, существует предел $v = \lim_{x \to x_0} f(x)$ в пространстве V_1. Поскольку $\|v - f(x)\|_2 \leq \frac{1}{M}\|v - f(x)\|_1$, точка v есть $\lim_{x \to x_0} f(x)$ также и в пространстве V_2, что и означает полноту V_2. □

Замечание. Метрики, порождаемые эквивалентными нормами, не совпадают (соответствующие метрические пространства не изометричны).

Теорема 1. *Если пространство V конечномерно, то любые две нормы в нем эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\dim V = n$, тогда без ограничения общности $V = \mathbb{R}^n$. В силу предложения 2 достаточно доказать, что произвольная норма $\|\cdot\|$ эквивалентна "евклидовой" норме $\|\cdot\|_2$ (см. пример 1).

Докажем, что норма $\|\cdot\|$ — непрерывная функция (в стандартной топологии на $\mathbb{R}^n$, заданной нормой $\|\cdot\|_2$). Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — какой-нибудь базис в $\mathbb{R}^n$, и $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. Тогда из свойства 3 нормы вытекает, что $\left|\|x\| - \|y\|\right| \leq \|x-y\| = \|\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)e_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|(x_i-y_i)e_i\|$, а из свойства 2 — что $\sum_{i=1}^n \|(x_i-y_i)e_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \, \|e_i\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \cdot \max_{i=1}^n \|e_i\|$, откуда и вытекает (по лемме о двух милиционерах), что если $x \to y$, то $\|x\| \to \|y\|$.

Из непрерывности вытекает, что норма $\|\cdot\|$ достигает своего наибольшего значения M и наименьшего значения m на единичной сфере $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}$. В силу определения нормы $m, M > 0$. Тогда для произвольного $x \in \mathbb{R}^n$ имеем $\|x\| = \|x\|_2 \left\|\frac{x}{\|x\|_2}\right\| \leq M\|x\|_2$ и $\geq m\|x\|_2$, поскольку $\frac{x}{\|x\|_2} \in S$. □

В бесконечномерном пространстве теорема 1 неверна — нормы могут быть неэквивалентны.

Пример 3. Нормы примера 2 на пространстве $C[0,1]$ не эквивалентны. Действительно, если $f_n(x) = nx$ при $0 \leq x \leq 1/n$, $= 2 - nx$ при $1/n \leq x \leq 2/n$ и $= 0$ при $2/n \leq x \leq 1$, то $\|f_n\|_{L_1} = 1/n \to 0$ при $n \to \infty$, в то время как $\|f_n\|_C = 1$ при всех n.

Метрическое пространство, порожденное в множестве непрерывных функций нормой L_1, неполно. Действительно, пусть $f_n(x) = 1/\sqrt{x}$ при $1/n^2 \leq x \leq 1$ и $f_n(x) = n$ при $0 \leq x \leq 1/n^2$. Имеет место неравенство $\|f_n - f_m\|_{L_1} = \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)| \, dx \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{1/n^2} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2/n$, откуда вытекает, что последовательность фундаментальна. Пусть $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ в метрике L_1. Докажем, что $f(x) = 1/\sqrt{x}$ в любой точке $x \in (0,1]$. Действительно, если $|f(x_0) - 1/\sqrt{x_0}| = \varepsilon > 0$ для некоторого x_0, то в силу непрерывности найдется $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - 1/\sqrt{x}| > \varepsilon/2$ для всех x таких, что $|x - x_0| < \delta$. Тогда при достаточно большом n имеем $\|f - f_n\|_{L_1} \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x) - 1/\sqrt{x}| \, dx \geq \varepsilon\delta$, вопреки сходимости. Следовательно, $f(x) = 1/\sqrt{x}$ при $0 < x \leq 1$. Но эта функция не продолжается непрерывным образом в точку $x = 0$. Таким образом, последовательность f_n предела не имеет, и пространство неполно.

Предложение 3. *Пусть V, W — конечномерные нормированные векторные пространства и $A : V \to W$ — линейный оператор. Тогда существует константа $C > 0$ такая, что $\|Ax\|_W \leq C\|x\|_V$ для всех $x \in V$.*

Доказательство. Операции сложения и умножения на число непрерывны в любой норме, поэтому отображение $A : V \to W$ непрерывно. Следовательно, непрерывна и функция $f(v) = \|Av\|_W$, откуда вытекает, что она ограничена сверху константой $C > 0$ на единичной сфере $S = \{x \in V \mid \|x\|_V = 1\}$. Тогда для произвольного $x \in V$ имеем $f(x) = \|x\|_V \cdot \left\|A\frac{v}{\|v\|}\right\| \leq C\|v\|$, поскольку $\frac{v}{\|v\|} \in S$. □

Наименьшая возможная константа C (равная, как нетрудно видеть, наибольшему значению $\|Av\|_W$ при $\|v\|_V = 1$) называется нормой оператора A и обозначается $\|A\|$. Операторная норма действительно является нормой на векторном пространстве $\mathrm{Hom}(V, W)$ линейных операторов из V в W — нетрудно проверить (проделайте !), что она обладает всеми нужными свойствами. Кроме того, очевидно, имеет место неравенство $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$. Это неравенство может быть строгим (постройте приимер !).

Пусть V, W — нормированные векторные пространства и $f : V \to W$. Линейный оператор $A : V \to W$ такой, что $f(x+v) = f(x) + Av + o(\|v\|_V)$, называется производной отображения f в точке x: $A = f'(x)$.

Пример 4. Пусть отображение $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ имеет производную $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Пусть $v = (0, \ldots, t, \ldots, 0)$, где t стоит на i-ом месте. Тогда $f(x+v) - f(x) = (\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x))t + o(t)$, откуда вытекает, что матрица отображения $f'(x)$ в стандартных базисах на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ есть $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$.

Обратное верно, если предположить непрерывность частных производных:

Предложение 4. *Пусть $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, где все функции $f_i(x)$, $i = 1, \ldots, m$, имеют в точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$ непрерывные частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда отображение f имеет в точке x производную, матрица которой в стандартных базисах на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ есть $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$.*

Доказательство. По теореме Лагранжа $f_i(x+v) - f_i(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1 + \theta_{i1}v_1, \ldots, x_n + \theta_{in}v_n)v_i$, где $0 \leq \theta_{ij} \leq 1$. Поскольку функции $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрерывны, имеем $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_1 + \theta_{i1}v_1, \ldots, x_n + \theta_{in}v_n) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) + o(1)$ при $\|v\|_V \to 0$, откуда получается требуемое. □