ЛЕКЦИЯ 12

Краткое содержание. Теоремы об обратной и неявной функции.

Предложение 1. *Пусть U, V, W — нормированные векторные пространства, $f : U \to V$, $g : V \to W$ непрерывны. Если производные $f'(x)$ и $g'(f(x))$ существуют, то $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$.*

Доказательство. $(g\circ f)(x+v) = g(f(x)+f'(x)v+o(\|v\|)) = (g\circ f)(x)+g'(f(x))f'(x)v+g'(f(x))o(\|v\|)+o(\|f'(x)v+o(\|v\|)\|)$. Согласно предложению 3 лекции 11, $\|f'(x)v\| \le const.\cdot\|v\|$ и $g'(f(x))o(\|v\|) \le const.\cdot o(\|v\|)$, откуда $(g\circ f)(x+v) = (g\circ f)(x)+g'(f(x))f'(x)v+o(\|v\|)$. $\square$

Теорема 1 (об обратной функции). *Пусть V — конечномерное нормированное пространство, отображение $f : V \to V$ имеет непрерывно зависящую от x производную $f'(x)$ в некоторой окрестности точки $x_0 \in V$, и оператор $f'(x_0) : V \to V$ обратим. Тогда в некоторой окрестности U точки $y_0 = f(x_0) \in V$ существует обратное отображение $f^{-1} : U \to V$, причем $(f^{-1})'(y_0) = (f'(x_0))^{-1}$.*

Для доказательства теоремы нам потребуется вспомогательное утверждение

Лемма 1. *Пусть $F : V \to W$ — отображение, для которого $\|F'(v)\| \le q$ при всех $v \in B$, где $B \subset V$ — некоторорый шар. Тогда $\|F(v_1)-F(v_2)\| \le q\|v_1-v_2\|$ для всех $v_1, v_2 \in B$.*

Доказательство. Согласно предложению 1 лекции 11, шар B — выпуклое множество: для всякого $t \in [0,1]$ имеем $tv_2+(1-t)v_1 \in B$. Пусть $\varphi(t) = F(tv_2+(1-t)v_1)$. По формуле Ньютона–Лейбница $F(v_2)-F(v_1) = \varphi(1)-\varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,dt$. Согласно предложению 1, $\varphi'(t) = F'(tv_2+(1-t)v_1)(v_2-v_1)$, откуда $\|F(v_2)-F(v_1)\| \le \int_0^1 \|\varphi'(t)\|\,dt \le q\|v_2-v_1\|$. $\square$

Следствие 1. *Если отображение $f : V \to W$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ при $x \in B$, где B — некоторый шар, то оно непрерывно в B.*

Доказательство. Из непрерывности $f'(x)$ вытекает, что функция $\varphi(x) = \|f'(x)\|$ также непрерывна и, следовательно, ограничена в B: $\|f'(x)\| \le C$. Согласно лемме, $\|f(x_1)-f(x_2)\| \le C\|x_1-x_2\|$ при $x_1, x_2 \in B$, откуда вытекает непрерывность. $\square$

Доказательство теоремы 1. Положим $\delta(v) = f(x_0+v)-f(x_0)-f'(x_0)v$; тогда условие $f(x_0+v) = f(x_0)+w$ равносильно $f'(x_0)^{-1}(w-f(x_0)-\delta(v)) = v$. Зафиксируем w и положим $F(v) = f'(x_0)^{-1}(w-f(x_0)-\delta(v))$. Тогда $F'(v) = f'(x_0)^{-1}\circ\delta'(v) = f'(x_0)^{-1}\circ(f'(x_0)-f'(x_0+v))$. Поскольку f имеет непрерывную производную, имеем $\|f'(x_0)-f'(x_0+v)\| \to 0$ при $v \to 0$, откуда вытекает, что $\|f'(x_0)-f'(x_0+v)\| \le \frac{1}{2}\|f'(x_0)^{-1}\|$ при достаточно малом v. Из неравенства $\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|$ следует, что при таких v имеет место неравенство $\|F'(v)\| \le 1/2$. Согласно лемме 1, отображение F — сжимающее. Поскольку метрическое пространство $V = \mathbb{R}^n$ полно, отображение F в нем неподвижную точку. Тем самым существование f^{-1} доказано.

Отображение $g = f^{-1}$ непрерывно. Действительно, из единственности неподвижной точки сжимающего отображения вытекает, что f инъективно: $f(x_1) \ne f(x_2)$ при $x_1 \ne x_2$, если x_1, x_2 достаточно близки к x_0. Пусть g разрывно в точке $y_* \in U$. Это означает, что имеется последовательность $y_n \to y_*$ такая, что $g(y_n) \not\to g(y_*)$. Поскольку окрестность U можно считать ограниченной, из последовательности $g(y_n)$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к точке $u \ne g(y_*)$. Согласно следствию 1 отображение $f'(x)$ непрерывно, откуда $y_n = f(g(y_n)) \to f(u) = y_* = f(g(y_*))$, что противоречит инъективности f.

Имеет место равенство $f(x_0+(f'(x_0))^{-1}w) = f(x_0)+w+o(\|(f'(x_0))^{-1}w\|) = f(x_0)+w+o(\|w\|)$ (в силу предложения 3 лекции 11). Применяя к обоим частям равенства непрерывное отображение g, получим $g(f(x_0)+w) = x_0+(f'(x_0))^{-1}w+o(\|w\|) = g(f(x_0))+(f'(x_0))^{-1}w+o(\|w\|)$ — то есть, $g'(f(x_0)) = (f'(x_0))^{-1}$. $\square$

Следствие 2 (теорема о неявной функции). *Пусть $f : V \times W \to W$ — непрерывное отображение конечномерных нормированных векторных пространств, для которого $f(x_0, y_0) = 0$ и в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0) \in U \times V$ отображение $f_x : W \to W$, заданное равенством $f_x(y) = f(x, y)$, имеет непрерывную производную, причем производная $f'_{x_0}(y_0)$ обратима. Тогда в некоторой окрестности U точки x_0 существует и единственно отображение $g : U \to W$ такое, что $f(x, g(x)) = 0$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $F : V \times W \to V \times W$, заданное равенством $F(x, y) = (x, f(x, y))$. Производная $F'(x_0, y_0)$ равна $I \times f'_{x_0}(y_0) : V \times W \to V \times W$, и ее обратимость эквивалетнта обратимости $f'_{x_0}(y_0)$. Из теоремы 1 вытекает, что F обратимо — очевидно, $G = F^{-1}$ имеет вид $G(x, y) = (x, g(y))$, где g — искомое отображение. $\square$