ЛЕКЦИЯ 2

Краткое содержание. Действительные числа.

Лемма 1 (о двух милиционерах). *Пусть X — топологическое пространство, $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ — отображения, для которых $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A$ и $f(x) \le g(x) \le h(x)$ для всех $x \in X$. Тогда $\lim_{x\to a} g(x) = A$.*

Доказательство. По определению топологии в $\mathbb{R}$ равенства $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = A$ означают, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $U_\varepsilon \subset X$, для которого $a \in U_\varepsilon$ и $|f(x) - A|, |h(x) - A| < \varepsilon$ при всех $x \in U_\varepsilon$. Из неравенства $f(x) \le g(x) \le h(x)$ вытекает теперь, что $|g(x) - A| < \varepsilon$ при всех $x \in U_\varepsilon$, откуда $\lim_{x\to a} g(x) = A$. □

Пусть X — топологическое пространство (например, $\overline{\mathbb{N}}$), а $M = \mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$ (в дальнейшем мы обобщим это требование). Отображение $f : X \to M$, для которого $\lim_{x,y\to a} |f(x) - f(y)| = 0$, называется фундаментальным в точке $a \in X$. Предел в последнем равенстве понимается как предел отображения $\varphi : (X \setminus \{a\})^2 \to M$, заданного формулой $\varphi(x, y) = |f(x) - f(y)|$.

Предложение 1. *Пусть $f : X \to M$ — отображение, для которого существует предел $\lim_{x\to a} f(x)$. Тогда f фундаментально в точке a.*

Доказательство. По определению топологии в M равенство $\lim_{x\to a} f(x) = A$ равносильно $\lim_{x\to a} |f(x) - A| = 0$. Имеем теперь $0 \le |f(x) - f(y)| \le |f(x) - A| + |f(y) - A|$, и нужный результат вытекает из "леммы о двух милиционерах". □

Предложение 2. *Отображение $f : X \to M$, фундаментальное в точке a, ограничено в некоторой окрестности точки a. Иными словами, существует окрестность $U \subset X$ точки a, точка $A \subset M$ и число $r > 0$ такие, что $|f(x) - A| < r$ для всех $x \in U$.*

Доказательство. По определению, существует такая окрестность $U \subset X$. $a \in U$, что $|f(x) - f(y)| < 1$ для всех $x, y \in U$. Пусть $x_0 \in U$; тогда возьмем $A = f(x_0)$ и $r = 1$. □

Теорема 1. *Если последовательность $a_n \in \mathbb{R}$ фундаментальна (в точке ∞), то предел $\lim_{n\to\infty} a_n$ существует.*

Поскольку в теореме речь идет о существовании некоторого действительного числа, для ее доказательства нужно иметь *определение* множества действительных чисел. Будем считать, что определение (и свойства) *рациональных* чисел нам известны.

Две последовательности a_n и b_n рациональных чисел назовем эквивалентными (обозначение $a_n \sim b_n$), если $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

Лемма 2. 1) *Описанное отношение действительно является отношением эквивалентности, то есть обладает свойствами*
   а) рефлексивности: $a_n \sim a_n$ для всякой последовательности a_n,
   б) симметричности: если $a_n \sim b_n$, то $b_n \sim a_n$,
   в) транзитивности: если $a_n \sim b_n$ и $b_n \sim c_n$, то $a_n \sim c_n$.

2) *Если последовательность a_n фундаментальна (в точке ∞), то всякая эквивалентная ей последовательность тоже фундаментальна.*

Доказательство леммы — несложное упражнение. Из первого утверждения вытекает, что множество всех последовательностей рациональных чисел разбивается на классы эквивалентности, то есть на такие подмножества, что любые две последовательности, принадлежащие одному и тому же подмножеству, эквивалентны, а последовательности, принадлежащие разным подмножествам, не эквивалентны. Из второго утверждения вытекает, что каждый класс эквивалентности либо целиком состоит из фундаментальных последовательностей (в точке ∞; в дальнейшем для последовательностей это уточнение будет подразумеваться), либо не содержит их вовсе.

Определение 1. Действительным числом называется класс эквивалентности (по описанному выше отношению) фундаментальных последовательностей рациональных чисел.

Пример. Постоянная последовательность $a_n = a \in \mathbb{Q}$ является фундаментальной. Ей эквивалентна любая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к числу a. Таким образом, можно считать, что $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: рациональные числа представлены последовательностями с рациональным пределом.

Лемма 3. *Если фундаментальная последовательность рациональных чисел содержит положительные и отрицательные члены со сколь угодно большими номерами, то она стремится к нулю.*

Доказательство. По определению фундаментальности (в точке ∞) для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что при $m.n > N$ выполнено неравенство $|a_m - a_n| < \varepsilon$. Пусть $n > N$ и $a_n > 0$. По условию существует $m > n > N$ такое, что $a_m < 0$, откуда $|a_n| = a_n < a_n - a_m = |a_n - a_m| < \varepsilon$. Аналогично рассуждаем в случае $a_n < 0$. Следовательно, $|a_n| < \varepsilon$ при всех $n > N$, и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. □

Очевидно, то же самое верно, если последовательность содержит члены, равные нулю, со сколь угодно большими номерами.

Следствие. *Пусть a_n и b_n — две фундаментальные последовательности рациональных чисел. Если существуют сколь угодно большие p такие, что $a_p < b_p$ и одновременно — сколь угодно большие q такие, что $a_q > b_q$, то последовательности a_n и b_n эквивалентны.*

Определение 2. Пусть α и β — действительные числа. Говорят, что $\alpha \le \beta$, если существуют представляющие эти числа последовательности a_n и b_n такие, что $a_n \le b_n$ для всех достаточно больших n. Запись $\alpha < \beta$ означает, что $\alpha \le \beta$ и $\alpha \ne \beta$.

Лемма 4. *Для любых двух $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполнено ровно одно из трех утверждений: либо $\alpha > \beta$, либо $\alpha < \beta$, либо $\alpha = \beta$.*

Лемма напрямую вытекает из следствия леммы 3.

Определение 3. Интервалом (α, β) называется множество $\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\}$.

Если пересечение двух интервалов непусто, то оно является интервалом (проверьте !). Отсюда следует, что интервалы можно принять за базу топологии в множестве действительных чисел; в дальнейшем именно такая топология и будет рассматриваться. Тем самым определено понятие непрерывности и предела отображений $X \to \mathbb{R}$, где X — произвольное топологическое пространство, т.е. функций, последовательностей и т.п. с действительными значениями.

Предложение 3. *Фундаментальная последовательность a_n рациональных чисел представляет действительное число α тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.*

Доказательство. Пусть a_n — последовательность, представляющая число α. В силу фундаментальности для всякого рационального $\varepsilon > 0$ неравенство $a_m - \varepsilon < a_n < a_m + \varepsilon$ выполнено для всех достаточно больших m и n. Действительное число a_m можно представить постоянной последовательностью $a_m, a_m, \dots$. Тогда по определению 2 получаем, что $a_m - \varepsilon < \alpha < a_m + \varepsilon$, если m достаточно велико. Это и означает, что $\lim_{m\to\infty} a_m = \alpha$.

Пусть теперь $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, а число α представлено фундаментальной последовательностью b_n. Тогда в силу сказанного выше $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ и, следовательно (проверьте !), $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$. Тем самым последовательность a_n эквивалентна b_n, то есть представляет то же самое число α. □

Лемма 5. *Если последовательности a_n и b_n рациональных чисел фундаментальны, то фундаментальны также и последовательности $-a_n$, $a_n + b_n$ и $a_n b_n$. Если последовательность a_n не сходится к нулю, то последовательность $1/a_n$ также фундаментальна.*

Доказательство. Доказательства четырех утверждений леммы похожи друг на друга; докажем для примера последнее. Утверждение $a_n \not\to 0$ означает, что существует $r > 0$ такое, что встречаются сколь угодно большие числа $n \in \mathbb{N}$, для которых выполнено неравенство $|a_n| > r$. Поскольку в силу фундаментальности для достаточно больших n, m выполнено неравенство $|a_n - a_m| < r/2$, получим, что для всякого достаточно большого n имеет место неравенство $|a_n| > r/2$. Теперь имеем (для больших m и n): $|1/a_n - 1/a_m| = \frac{|a_n - a_m|}{|a_n||a_m|} \le \frac{4}{r^2}|a_n - a_m|$, откуда вытекает, что последовательность $1/a_n$ фундаментальна. □

Определение 4. Пусть действительные числа α и β представлены фундаментальными последовательностями a_n и b_n рациональных чисел. Тогда суммой $\alpha + \beta$ называется число, представленное последовательностью $a_n + b_n$, произведением $\alpha\beta$ — число, представленное последовательностью $a_n b_n$, противоположным числом $-\alpha$ — число, представленное последовательностью $-a_n$, и обратным числом $1/\alpha$ (если $\alpha \ne 0$) — число, представленное последовательностью $1/a_n$.

Предложение 4. *Определение 4 корректно (то есть не зависит от выбора фундаментальной последовательности, представляющей данное действительное число). Действия над действительными числами удовлетворяют аксиомам поля: сложение и умножение не зависят от расстановки скобок (ассоциативны) и от порядка слагаемых (коммутативны), имеет место тождество дистрибутивности $\alpha(\beta+\gamma) = \alpha\beta+\alpha\gamma$, существуют нуль и единица, удовлетворяющие тождествам $\alpha + 0 = \alpha = \alpha \cdot 1$, всякое число имеет противоположное и всякое число, кроме нуля, имеет обратное. Сумма и произведение двух положительных чисел положительны; число, обратное к положительному, положительно.*

Доказательство. Корректность вытекает из предложения 3. Свойства действий над действительными числами вытекают из соответствующих свойств рациональных чисел. $\square$

Доказательство теоремы 1. Представим действительное число a_n фундаментальной последовательностью $a_{n,k}$ рациональных чисел. Согласно предложению 3, $a_n = \lim_{k\to\infty} a_{n,k}$ и, следовательно, для каждого n существует такое K_n, что при $k \geq K_n$ имеет место неравенство $|a_{n,k} - a_n| < 1/n$. Рассмотрим последовательность $b_n = a_{n,K_n}$. Имеет место неравенство $0 \leq |b_p - b_q| \leq |b_p - a_p| + |a_p - a_q| + |b_q - a_q|$. Имеем $\lim_{p,q\to\infty} |a_p - a_q| = 0$, поскольку последовательность a_n фундаментальна; также $\lim_{p,q\to\infty} |b_p - a_p| = \lim_{p,q\to\infty} |b_q - a_q| = 0$ по построению последовательности b_n; следовательно, по лемме о двух милиционерах $\lim_{p,q\to\infty} |b_p - b_q| = 0$, то есть последовательность b_n фундаментальна.

Согласно определению, последовательность b_n представляет некоторое действительное число a. Очевидно, $0 \leq |a_n - a| \leq |a_n - b_n| + |b_n - a| < |b_n - a| + 1/n$. Согласно предложению 3 имеем $\lim_{n\to\infty} b_n = a$, то есть $\lim_{n\to\infty} |b_n - a| = 0$, откуда $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ по лемме о двух милиционерах. $\square$

Имеет место такое обобщение теоремы 1:

Теорема 1′. *Пусть топологическое пространство X имеет счетную базу окрестностей, т.е. базу окрестностей, элементы которой находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством натуральных чисел: $U_1, U_2, \ldots$. Тогда всякое отображение $f : X \to \mathbb{R}$, фундаментальное в точке $a \in X$, имеет в этой точке предел $\lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$.*

Доказательство — упражнение. Счетную базу имеют многие полезные пространства, например, $\overline{\mathbb{N}}$ (по определению) и $\mathbb{R}$ (мы докажем это позднее).

Предложение 5. *Возрастающая последовательность действительных чисел, ограниченная сверху, имеет предел.*

Доказательство. Обозначим последовательность a_n; достаточно доказать, что она фундаментальна. Пусть это не так. Тогда существует константа $r > 0$ и две последовательности натуральных чисел m_k, n_k такие, что $m_1 < m_2 < \ldots$, $m_k < n_k$ для любого k и $a_{n_k} - a_{m_k} > r$. Положим по определению $k_1 = 1$ и выберем в последовательности m_k какой-нибудь член m_{k_2}, больший $n_{k_1} = n_1$; тогда $a_{m_{k_2}} - a_{m_{k_1}} > a_{n_1} - a_{m_1} = r$. Аналогично, выберем k_3 такое, что $m_{k_3} > n_{k_2}$; тогда $a_{m_{k_3}} - a_{m_{k_2}} > r$. Продолжая этот процесс, получим последовательность $b_1 = a_{m_{k_1}}, b_2 = a_{m_{k_2}}, \ldots$, для которой $b_{s+1} - b_s > r$ для всех s. Такая последовательность не может быть фундаментальной, что противоречит фундаментальности a_n. $\square$

Следствие 1 (принцип вложенных отрезков). *Пусть $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$ — последовательность вложенных отрезков действительной прямой. Тогда пересечение $\bigcap_n [a_n, b_n]$ непусто.*

Доказательство. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ возрастает и ограничена сверху числом b_1. Следовательно, она имеет предел A. Очевидно, $A \geq a_n$ для всех n Если $A > b_k$ для некоторого k, то $|a_n - A| > |A - b_k|$ для всех n, что противоречит сходимости. Следовательно, $A \leq b_n$ для всех n, то есть $A \in \bigcap_n [a_n, b_n]$. $\square$