ЛЕКЦИЯ 3

Краткое содержание. Точная верхняя грань. Свойства непрерывных отображений. Связные и линейно связные пространства.

Вот некоторые следствия теоремы Коши о сходимости фундаментальной последовательности. *Рядом* называется выражение $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \dots$, которое понимается как последовательность $A_0 = a_0, A_1 = a_0 + a_1, A_2 = a_0 + a_1 + a_2, \dots$ (т.е. говорят, например, "ряд сходится", если последовательность A_n сходится). Здесь $a_0, a_1, \dots$ — любые объекты, которые можно складывать (т.е. элементы любой абелевой группы), например, действительные или комплексные числа, функции и т.п.

Предложение 1. *Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Доказательство. Если последовательность A_n сходится, то она фундаментальна: $\lim_{m,n\to\infty} A_m - A_n = 0$. В частности, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_{n+1} - A_n = 0$. $\square$

Обратное неверно:

Пример 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ расходится, хотя $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$. Действительно, $A_{2^{k+1}} - A_{2^k} \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}} 1/n \ge 2^k \cdot 1/2^{k+1} = 1/2$, откуда вытекает, что последовательность A_n не фундаментальна и, следовательно, расходится.

Предложение 2. *Если $a_0, a_1, \dots \in \mathbb{C}$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ сходится, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ также сходится.*

Доказательство. Последовательность $B_0 = |a_0|, B_1 = |a_0| + |a_1|, B_2 = |a_0| + |a_1| + |a_2|, \dots$ сходится и, следовательно, фундаментальна: $\lim_{m,n\to\infty}(B_m - B_n) = \lim_{m,n\to\infty}(|a_{m+1}| + \dots + |a_n|) = 0$. Для последовательности $A_0 = a_0, A_1 = a_1 + a_2, \dots$ имеем $0 \le |A_n - A_m| = |a_{m+1} + \dots + a_n| \le |a_{m+1}| + \dots + |a_n| = B_m - B_n$, откуда по лемме о двух милиционерах $\lim_{m,n\to\infty}(A_n - A_m) = 0$. Из теоремы Коши вытекает теперь, что последовательность A_n (т.е. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$) сходится. $\square$

Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ сходится, то говорят, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится. Таким образом, из абсолютной сходимости вытекает сходимость. Обратное неверно:

Пример 2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 1/n$ сходится (к $-\ln 2$, но этого мы сейчас доказывать не будем). Это вытекает из такого утверждения:

Лемма. *Если $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \dots \ge 0$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится.*

Доказательство. Положим $A_p = \sum_{n=1}^{p}(-1)^n a_n$. Тогда $A_1 \ge A_3 \ge A_4 \dots \ge A_6 \ge A_4 \ge A_2$, откуда вытекает, что последовательность $A_1, A_3, \dots$ возрастает и ограничена сверху, а последовательность $A_2, A_4, \dots$ убывает и ограничена снизу. Поэтому обе последовательности имеют пределы. Поскольку $\lim_{p\to\infty}(A_{2p+1} - A_{2p}) = \lim_{p\to\infty} a_{2p} = 0$, эти пределы совпадают и, следовательно, являются пределом всей последовательности A_p (почему ?). Таким образом, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ сходится. $\square$

Абсолютно сходящимся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 1/n$ не является: как показано в примере 1, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ расходится.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$. Число $M \in \mathbb{R}$ называется точной верхней гранью множества X (запись $M = \sup X$), если оно ограничивает X сверху, но никакое меньшее число этим свойством уже не обладает: $\forall x \in X : x \le M$ и $\forall m < M \exists x \in X : x > m$. Наибольший элемент множества является его точной верхней гранью, но точная верхняя грань может и не принадлежать множеству: $\sup(0,1) = 1$ (тогда, разумеется, множество не содержит наибольшего элемента, поскольку, как нетрудно видеть, точная верхняя грань единственна).

Предложение 3. *Всякое ограниченное сверху множество действительных чисел имеет точную верхнюю грань.*

Доказательство. Пусть число b_1 ограничивает X сверху, а a_1 — нет. Рассмотрим число $c = (a_1 + b_1)/2$. Если оно ограничивает X сверху, то положим $a_2 = c$, $b_2 = b_1$, а в противном случае положим $a_2 = a_1$, $b_2 = c$. Теперь рассмотрим отрезок $[a_2, b_2]$ и произведем с ним те же самые действия, и т.д. Таким образом получим последовательность $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$ вложенных отрезков, правые концы которых ограничивают множество X сверху, а левые — нет. По принципу вложенных отрезков найдется число $M \in \bigcap_n [a_n, b_n]$. Поскольку $\lim_{n\to\infty} b_n - a_n \to 0$, число M единственно и $M = \lim_{n\to\infty} b_n$ — следовательно, M ограничивает X сверху. С другой стороны, $M = \lim_{n\to\infty} a_n$, поэтому если $m < M$, то $m < a_k$ для некоторого k — отсюда вытекает, что m не ограничивает X сверху. $\square$

Предложение 4. *Множество $\mathbb{R}$ несчетно, то есть не существует взаимно однозначного отображения $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Несчетно также и множество точек любого отрезка.*

Доказательство. Пусть f существует. Рассмотрим произвольный отрезок $[a_1, b_1]$. По крайней мере одна из его половин не содержит числа $f(1)$; обозначим эту половину $[a_2, b_2]$. По крайней мере одна из половин отрезка $[a_2, b_2]$ не содержит числа $f(2)$; обозначим эту половину $[a_3, b_3]$, и т.д. Получится последовательность $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$. Точка $M \in \bigcap_n [a_n, b_n]$ не может совпадать с $f(k)$ ни для какого $k \in \mathbb{N}$ — противоречие. □

Предложение 5. *Всякий отрезок действительной оси (отличный от точки) содержит как рациональные, так и иррациональные числа.*

Доказательство. Согласно предложению 3 лекции 2, всякое действительное число есть предел последовательности рациональных чисел. Если отрезок $[a, b]$ не содержит рациональных чисел, число $c = (a + b)/2$ не может быть таким пределом — противоречие.

Множество рациональных чисел счетно. Это вытекает из такой последовательности утверждений:

Лемма 5.1. *Множество целых чисел счетно.*

Доказательство. Пусть $f(n) = n/2$, если n четно, и $f(n) = -(n - 1)/2$, если n нечетно. Тогда $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ — взаимно однозначное отображение. □

Лемма 5.2. *Декартово произведение двух счетных множеств счетно.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ счетно. Положим $f(m, n) = (m + n)(m + n - 1)/2 + m$. Нетрудно убедиться (проделайте !), что $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — взаимно однозначное отображение. □

Лемма 5.3. *Бесконечное подмножество счетного множества счетно.*

Доказательство. Пусть $X \subset \mathbb{N}$. Тогда в X содержится наименьший элемент x_1 — положим по определению $x_1 = f(1)$. В множестве $X \setminus \{x_1\}$ также содержится наименьший элемент x_2 — положим $x_2 = f(2)$. Поскольку для каждого $x \in X$ существует только конечное количество (максимум x штук) элементов $y \in X$ таких, что $y < x$, то самое позднее на x-ом шаге мы получим $x = f(k)$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тем самым $f : \mathbb{N} \to X$ — взаимно однозначное отображение. □

Тем самым из леммы 5.2 вытекает, что множество пар целых чисел счетно. Множество рациональных чисел это множество пар, не имеющих общего делителя, в которых второй элемент (знаменатель) положителен — оно счетно по лемме 5.3. По той же лемме счетно и множество рациональных точек любого отрезка. Поскольку множество всех точек отрезка несчетно по предложению 4, всякий отрезок содержит иррациональные числа. □

Следствие. *Топологическое пространство $\mathbb{R}$ имеет счетную базу.*

Доказательство. В качестве базы можно взять совокупность интервалов с рациональными концами — оно счетно по лемме 5.2, поскольку множество рациональных чисел счетно. Поскольку всякое действительное число есть предел последовательности рациональных чисел, имеет место равенство $(a, b) = \bigcup_{\substack{\alpha, \beta \in \mathbb{Q} \\ (\alpha, \beta) \subset (a, b)}} (\alpha, \beta)$, которое доказывает, что интервалы с рациональными концами действительно образуют базу стандартной топологии в $\mathbb{R}$. □

Пусть X, Y, Z — топологические пространства, $f : X \to Y$, $h : Y \to Z$ и $g : X \to Z$ — отображения.

Предложение 6. *Если отображение f непрерывно в точке $a \in X$, а отображение h — в точке $b = f(a) \in Y$, то композиция $h \circ f$ непрерывна в точке a. Если отображения f и g непрерывны в точке $a \in X$ соответственно, то декартово произведение отображений $f \times g : X \to Y \times Z$ (определяемое формулой $(f \times g)(x) = (f(x), g(x))$) непрерывно в точке a.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Второе: пусть $U \subset Y \times Z$ открыто и $(f(a), g(a)) \in U$. В силу открытости множества U и определения базы окрестностей в декартовом произведении найдется пара открытых множеств $V \subset Y$, $W \subset Z$ такая, что $f(a) \in V$, $g(a) \in W$ и $V \times W \subset U$. В силу непрерывности f и g в точке a существуют открытые множества $Q_f, Q_g \subset X$ такие, что $a \in Q_f$, $f(Q_f) \subset V$, и аналогично для Q_g и g. Тогда множество $Q = Q_f \cap Q_g$ открыто, содержит точку $a \in X$ и обладает тем свойством, что $f(Q) \subset f(Q_f) \subset V$ и $g(Q) \subset g(Q_g) \subset W$, откуда $(f, g)(Q) \subset V \times W \subset U$ — непрерывность доказана. □

Следствие. *Если $\lim_{x \to a} f(x) = b$, $\lim_{y \to b} h(y) = c$ и $f(x) \neq b$ при всех x из некоторой окрестности точки a, то $\lim_{x \to a} (h \circ f)(x) = c$.*

Пример применения предложения 6:

Пример 3. Предел произведения равен произведению пределов; это верно также и для бесконечных пределов без знака, если произведение определено (т.е. кроме случая, когда один предел равен нулю, а второй бесконечен). Действительно, пусть $\lim_{x\to a} f(x) = p \in \widetilde{\mathbb{R}}$, $\lim_{x\to a} g(x) = q \in \widetilde{\mathbb{R}}$. Переопределим, при необходимости, f и g в точке a, полагая $f(a) = p$, $g(a) = q$, так что f и g теперь непрерывны в точке a.

Определим отображение $\mathrm{mult} : (\widetilde{\mathbb{R}} \times \widetilde{\mathbb{R}}) \setminus \{(0,\infty),(\infty,0)\} \to \widetilde{\mathbb{R}}$ равенством $\mathrm{mult}(x,y) = xy$, если x и y конечны (принадлежат $\mathbb{R} \subset \widetilde{\mathbb{R}}$), и $\mathrm{mult}(x,y) = \infty$, если хотя бы одно из двух чисел бесконечно. Докажем, что отображение mult непрерывно. В точке $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ это очевидно (проделайте !); пусть $x = \infty$ и $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Пусть $U \subset \widetilde{\mathbb{R}}$ — окрестность точки ∞; достаточно рассмотреть случай, когда U — базовая окрестность, т.е. $U = \{\infty\} \cup \{t \in \mathbb{R} \mid |t| > M\}$. Возьмем $V = (y/2, 2y) \subset \mathbb{R}$ (для удобства обозначений считаем, что $y > 0$; случай $y < 0$ разбирается аналогично) и $W = \{s \in \mathbb{R} \mid |s| > 2M/y\}$. Множества V и W открыты, $(\infty, y) \in W \times V$. Очевидно, если $(w,v) \in W \times V \subset \widetilde{\mathbb{R}}^2$, то $\mathrm{mult}(w,v) \in U$, и непрерывность отображения mult в точке (∞, y) доказана. В точке (x,∞) доказательство такое же, а в точке (∞,∞) — несложное упражнение. Тем самым отображение mult непрерывно всюду, где определено. Теперь $fg : X \to \widetilde{\mathbb{R}}$ — композиция непрерывных отображений $(f \times g)$ и mult.

Ясно, что подобных примеров можно построить много.