ЛЕКЦИЯ 4

Краткое содержание. Связность. Компактность.

В произвольном топологическом пространстве X множества $\varnothing$ и X являются одновременно открытыми и замкнутыми. Пространство X называется *связным*, если в нем нет никаких других подмножеств, обладающих этим свойством — иными словами, если X *нельзя* представить в виде объединения двух открытых непересекающихся подмножеств. Если подмножество $A \subset X$ открыто, замкнуто и связно (т.е. не содержит собственных подмножеств, открытых и замкнутых одновременно), то оно называется компонентой связности пространства X.

Теорема 1. *Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств, и пространство X связно. Тогда образ $f(X) \subset Y$ также связен.*

Доказательство. Пусть множество $f(X) \subset Y$ несвязно. По определению топологии на подмножестве пространства Y это означает, что существуют два открытых подмножества $Y_1, Y_2 \subset Y$ такие, что $f(X) \subset Y_1 \cup Y_2$, $f(X) \cap Y_1 \neq \varnothing \neq f(X) \cap Y_2$, но $f(X) \cap Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$. По определению непрерывного отображения прообразы $X_1 = f^{-1}(Y_1)$ и $X_2 = f^{-1}(Y_2)$ открыты в X. Нетрудно видеть, что $X = X_1 \cup X_2$, $X_1 \neq \varnothing \neq X_2$, но $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Это противоречит связности пространства X. □

Важнейший для анализа пример связного множества:

Предложение 1. *Отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$ связен.*

Доказательство. Пусть $[a, b] = X_1 \cup X_2$, где X_1, X_2 открыты, непусты, не пересекаются, и $a \in X_1$. Рассмотрим множество $A = \{t \in [a, b] \mid [a, t] \subset U_1\}$. Оно непусто и ограничено сверху (числом b); обозначим $p = \sup A$. Пусть $p \in U_1$, тогда $p < b$ (поскольку $U_2 \neq \varnothing$). Поскольку U_1 открыто, существует $\varepsilon > 0$ такое, что $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \subset U_1$ — но тогда $[a, p + \varepsilon/2] \subset U_1$, и $p + \varepsilon/2 \in A$ вопреки выбору p. Значит, $p \in U_2$. Тогда $p > a$, и в силу открытости U_2 существует $\varepsilon > 0$ такое, что $(p - \varepsilon, p + \varepsilon) \subset U_2$. Но тогда $p - \varepsilon/2 \in U_2$, то есть отрезок $[0.p - \varepsilon/2] \not\subset U_1$. Следовательно, $p - \varepsilon/2$ ограничивает множество A сверху, вопреки выбору p. □

Верно также и обратное:

Предложение 2. *Если множество $U \subset \mathbb{R}$ связно, и $a, b \in U$, то $[a, b] \subset U$.*

Доказательство. Пусть $x \in [a, b]$, $x \notin U$. Тогда множества $U_1 = U \cap (-\infty, x)$ и $U_2 = U \cap (x. + \infty)$ открыты (как подмножества U), непусты, не пересекаются, и $U = U_1 \cup U_2$, вопреки связности. □

Из этого вытекает такое утверждение:

Предложение 3 (теорема о промежуточном значении). *Пусть X — связное пространство, $a, b \in X$, $f : X \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение, $f(a) = A$ и $f(b) = B$. Тогда для всякого $C \in [A, B]$ найдется $c \in X$ такое, что $f(c) = C$.*

Коротко: непрерывная связном множестве функция, принимая два значения, принимает и всякое промежуточное.

Доказательство. Множество $f(X)$ связно в силу теоремы 1. Оно содержит точки A и B — следовательно, согласно предложению 2, оно содержит весь отрезок $[A, B]$, в том числе и точку C. □

Пример 1. Функция $f(x) = x^2$ непрерывна как произведение непрерывной функции $g(x) = x$ (тождественного отображения) на себя. Она принимает значения 1 и 4 (в точках 1 и 2 соответственно) — следовательно, она принимает значение 2 в точке, традиционно обозначаемой $\sqrt{2} \in [1, 2]$. Так же доказывается, что для всякого $n \in \mathbb{N}$ и всякого $a \in \mathbb{R}_+$ существует и единственно число положительное число $b \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt[n]{a}$, обладающее свойством $b^n = a$.

Топологическое пространство X называется *линейно связным*, если для произвольных двух точек $a, b \in X$ существует непрерывное отображение $f : [0, 1] \to X$ такое, что $f(0) = a$, $f(1) = b$ (иными словами, существует непрерывная кривая, соединяющая точки a и b).

Теорема 2. *Линейно связное топологическое пространство X связно.*

Доказательство. Пусть X линейно связно, но не связно: $X = X_1 \cup X_2$, где X_1 и X_2 открыты, непусты и не пересекаются. Возьмем $a \in X_1$, $b \in X_2$ и рассмотрим отображение $f : [0,1] \to X$ из определения линейно связного пространства. Тогда множества $T_1 = f^{-1}(X_1) \subset [0,1]$ и $T_2 = f^{-1}(X_2) \subset [0,1]$ открыты (поскольку отображение f непрерывно), непусты (поскольку $0 \in T_1$. $1 \in T_2$) и не пересекаются (поскольку не пересекаются X_1 и X_2), а их объединение — весь отрезок $[0,1]$. Это противоречит теореме 1. □

Пример 2. Примеры линейно связных (и, следовательно, связных) пространств: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, шар в $\mathbb{R}^n$, произвольное выпуклое множество в $\mathbb{R}^n$ и т.д.

Пример 3. Пример связного, но не линейно связного пространства X: график функции $\sin 1/x$ при $x \in (0,\pi)$, к которому добавлено начало координат. Докажем связность. График функции линейно связен (почему ?) и, следовательно, связен, точка связна, поэтому если $X = X_1 \cup X_2$, где $X_1, X_2 \subset X$ открыты, непусты и не пересекаются, то X_1 — точка, а X_2 — график. По определению топологии в подмножестве, $X_1 = X \cap V$, где $V \subset \mathbb{R}^2$ открыто. Открытое множество V, содержащее начало координат, содержит и некоторый открытый (без границы) квадрат Q с центром в начале координат. Но такой квадрат Q обязательно пересекается с графиком функции $\sin 1/x$, вопреки предположению, что $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Следовательно, X связно.

Докажем, что X не является линейно связным. Пусть $f : [0,1] \to X$ — непрерывная кривая, для которой $f(0) = (0,0)$ (начало координат), а $f(1) = (1, \sin 1)$ (точка графика). Тогда при всяком t имеем либо $f(t) = (0,0)$, либо $f(t) = (x(t), \sin 1/x(t))$ для некоторого $x(t) \in (0,1)$. Множество $A = f^{-1}(0,0)$ замкнуто (как прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении), откуда вытекает, что $\sup A \stackrel{\text{def}}{=} p \in A$ (докажите !). Поскольку $1 \notin A$, заключаем, что $p < 1$, и $f(t) = (x(t), \sin 1/x(t))$ для всякого $t \in (p,1)$.

В силу непрерывности f имеем $\lim_{t\to p+0} x(t) = 0$ и $\lim_{t\to p+0} \sin 1/x(t) = 0$. В силу теоремы о промежуточном значении для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ функция $x(t)$ принимает при $t \in (p, p+\varepsilon)$ бесконечно много значений вида $1/(2\pi k + \pi/2)$, $k \in \mathbb{N}$ (почему ?). Но отсюда следует, что на любом интервале $(p, p+\varepsilon)$ существуют значения t такие, что $\sin 1/x(t) = 1$ — вопреки предположению, что $\sin 1/x(t) \to 0$ при $t \to p+0$.

Совокупность (конечная или бесконечная) подмножеств $U_\alpha \subset X$ топологического пространства X называется покрытием, если $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$. Топологическое пространство X называется *компактным* (или *компактом*), если в любом его покрытии открытыми множествами U_α можно выбрать конечный набор множеств $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}$, которые также образуют покрытие. Коротко: любое покрытие открытыми множествами содержит конечное подпокрытие.

Пример 4. Всякое конечное топологическое пространство, разумеется, компактно. Интервал $(0,1)$ некомпактен: $(0,1) = \bigcup_n (1/n, 1)$, но никакое конечное семейство интервалов вида $(1/n, 1)$ не покрывает интервала $(0,1)$. Некомпактна и прямая: $\mathbb{R} = \bigcup_n (n-1, n+1)$, но никакая конечная совокупность интервалов не покрывает прямой.

Теорема 3. *Отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}$ — компактное пространство. То же самое верно для произведения отрезков (параллелепипеда) $[a_1,b_1] \times \dots \times [a_n,b_n] \subset \mathbb{R}^n$*

Доказательство. Предположим, что теорема неверна. Разобьем отрезок $I_1 = [a,b]$ на две половины: $[a,(a+b)/2]$ и $[(a+b)/2, b]$. По крайней мере одну из них нельзя покрыть конечным наборов множеств U_α. Обозначим эту половину I_2 и, в свою очередь, разобьем ее пополам. Продолжая действовать так же, получим последовательность вложенных отрезков $I_1 \supset I_2 \supset \dots$, которая имеет общую точку c. Поскольку $[a,b] = \bigcup_\alpha U_\alpha$, найдется такое α_0, что $c \in U_{\alpha_0}$. Поскольку U_{α_0} — открытое множество, оно содержит интервал вида $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Длина отрезка I_n равна $(b-a)/2^n \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому при некотором n имеем $I_n \subset (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subset U_{\alpha_0}$, вопреки предположению, что I_n нельзя покрыть никаким конечным набором множеств U_α.

Утверждение про параллелепипед доказывается аналогично, только вместо принципа вложенных отрезков используется его очевидное обобщение: последовательность вложенных параллелепипедов имеет общую точку. □

Напомним, что подмножество $Y \subset X$ топологического пространства называется замкнутым, если его дополнение $X \setminus Y$ открыто.

Теорема 4. *Замкнутое подмножество компактного топологического пространства компактно.*

Доказательство. Пусть X компактно, $Y \subset X$ замкнуто, и $\{U_\alpha\}$ — покрытие Y открытыми множествами. Если к $\{U_\alpha\}$ добавить открытое множество $V = X \setminus Y$, то получится покрытие X. Из этого покрытия можно выбрать конечное число множеств $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}, V$ так, чтобы они покрывали X. Тогда множества $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}$ покрывают Y. □

Следствие 1 (лемма Гейне–Бореля). *Замкнутое и ограниченное множество $Y \subset \mathbb{R}^n$ компактно.*

Действительно, ограниченность означает, что Y лежит в некотором параллелепипеде, а он, по теореме 3, компактен. Верно и обратное утверждение, доказательство которого будет дано позднее.

Топологическое пространство X называется отделимым (или хаусдорфовым), если для любых двух различных точек $a, b \in X$ существуют открытые множества $U_a, U_b \subset X$ такие, что $a \in U_a$, $b \in U_b$, $U_a \cap U_b = \varnothing$. Все встречавшиеся нам до сих пор топологические пространства (кроме некоторых искусственных примеров в лекции 1) отделимы.

Теорема 5. *Пусть X — отделимое пространство, а $Y \subset X$ компактно. Тогда Y замкнуто.*

Доказательство. Зафиксируем $a \in X \setminus Y$. Для произвольной точки $b \in Y$ существуют, в силу отделимости, окрестность U_b точки b и не пересекающая ее окрестность V_b точки a. Окрестности U_b для всех $b \in Y$ образуют покрытие Y (поскольку $b \in U_b$). Поэтому существует конечный набор точек $b_1, \dots, b_N \in Y$ такой, что $U_{b_1}, \dots, U_{b_N}$ покрывают Y. Но тогда множество $V_{b_1} \cap \dots \cap V_{b_N}$ открыто, содержит a и не пересекается с Y — следовательно, множество $X \setminus Y$ открыто, а Y замкнуто. □

Теорема 6. *Образ компактного пространства при непрерывном отображении компактен.*

Доказательство. Пусть $f : X \to Y$ непрерывно, X компактно, а $\{U_\alpha\}$ — покрытие образа $f(X) \subset Y$ открытыми множествами. Прообразы $V_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1}(U_\alpha) \subset X$ открыты и покрывают X. Существует конечный набор индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ такой, что $X = \bigcup_{n=1}^N V_{\alpha_n}$. Но тогда множества $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_N}$ покрывают $f(X)$. □

Непонятное, но важное замечание. Отметим аналогию: *образ* компакта при непрерывном отображении — компакт, в то время как *прообраз* замкнутого множества при непрерывном отображении замкнут. Нетрудно видеть, что образ замкнутого отображения замкнут не обязательно: если $f(x) = \operatorname{arctg} x$, то $f(\mathbb{R}) = (-\pi/2, \pi/2)$, и прообраз компакта — не обязательно компакт: если $f(x) \equiv 0$, то $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$. Теорема 5 заставляет думать, что компактные подмножества — частный случай замкнутых; на самом деле они ведут себя как “двойственный” объект.