ЛЕКЦИЯ 5

Краткое содержание. Компакты (продолжение). Метрические пространства.

В лекции 4 (следствие 1) была доказана лемма Гейне–Бореля: ограниченное и замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$ компактно. Верно и обратное:

Теорема 1 (лемма Гейне–Бореля, продолжение). *Компактное подпространство $X \subset \mathbb{R}^n$ ограничено и замкнуто.*

Доказательство. Поскольку пространство $\mathbb{R}^n$ отделимо, замкнутость следует из теоремы 5 лекции 2. Рассмотрим теперь последовательность $U_1 \subset U_2 \subset \dots$, где $U_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < k\}$ — открытый шар радиуса k с центром в начале координат. Множества U_k открыты и покрывают все $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, произвольное подмножество $X \subset \mathbb{R}^n$. Если X компактно, то из покрытия U_k можно выбрать конечное подпокрытие $U_{k_1}, \dots, U_{k_N}$. Если $k_1 < \dots < k_N$, то $X \subset \bigcup_{s=1}^n U_{k_s} = U_{k_N}$. Таким образом, X лежит в шаре радиуса k_N, то есть ограничено. □

Пусть X — топологическое пространство, и $Y \subset X$. Точка $a \in X$ называется *предельной* для множества Y, если для каждого открытого множества $U \ni a$ пересечение $U \cap Y$ содержит хотя бы одну точку $b \neq a$.

Пример 1. Предельными точками множества $Y = (0,1) \cup \{2\}$ являются все точки отрезка $[0,1]$. Таким образом, $2 \in Y$, но не является его предельной точкой, в то время как $0, 1 \notin Y$ — предельные точки.

Пример 2. Точка $a \in X$ является предельной для счетного множества $\{a_1, a_2, \dots\} \subset X$ (X — произвольное топологическое пространство), если из последовательности a_n можно выбрать подпоследовательность $a_{n_1}, a_{n_2}, \dots$ (с неповторяющимися индексами $n_1, n_2, \dots \in \mathbb{N}$), сходящуюся к a. Таким образом, множество $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \subset \mathbb{R}$ не имеет предельных точек, а то же самое множество как подмножество $\overline{\mathbb{R}}$ — имеет единственную предельную точку $+\infty$.

Пример 3. Если множество $M \subset \mathbb{R}$ ограничено, то либо $\sup M$ — его предельная точка, либо $\sup M \in M$ и является изолированной точкой. То же самое верно для $\inf M$. Тем самым если M ограничено и замкнуто, то оно содержит свою точную верхнюю и точную нижнюю грань.

Предложение 1. *Множество Y замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки. Для произвольного множества Y его замыкание $\overline{Y}$ есть объединение Y и множества всех предельных точек Y.*

Доказательство. Пусть Y замкнуто и $a \in X \setminus Y$. В силу открытости этого множества, найдется окрестность U такая, что $a \in U \subset X \setminus Y$. Следовательно, $U \cap Y = \varnothing$, и a не является предельной точкой для Y. Обратно, пусть Y содержит все свои предельные точки, и $b \in X \setminus Y$. Тогда b не является предельной точкой для Y и, следовательно, имеет окрестность U, с Y не пересекающуюся. Поэтому $U \subset X \setminus Y$, и $X \setminus Y$ открыто, то есть Y замкнуто.

Обозначим $\mathrm{lp}(Y)$ множество всех предельных точек Y. Напомним, что замыкание $\overline{Y}$ есть пересечение всех замкнутых множеств $M \supset Y$. Если $M \supset Y$ и $a \in \mathrm{lp}(Y)$, то a — предельная точка также и для M. Поэтому $a \in M$, то есть $Y \cup \mathrm{lp}(Y) \subset M$, откуда $Y \cup \mathrm{lp}(Y) \subset \overline{Y}$. С другой стороны, пусть $a \notin Y \cup \mathrm{lp}(Y)$. Это означает, что у a имеется окрестность U, не пересекающаяся с Y; такая окрестность, очевидно, не пересекается и с $\mathrm{lp}(Y)$. Следовательно, U лежит в дополнении к $Y \cup \mathrm{lp}(Y)$ — тем самым, это дополнение открыто, а $Y \cup \mathrm{lp}(Y)$ замкнуто. Отсюда вытекает, что $\overline{Y} \subset Y \cup \mathrm{lp}(Y)$, то есть на самом деле эти два множества совпадают. □

Следствие 1 (леммы Гейне–Бореля, теоремы 6 лекции 2 и примера 3). *Непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}$, где X — компакт, ограничена и достигает наибольшего и наименьшего значения.*

Пример 4. Докажем неравенство Коши $(x_1 x_2 \dots x_n)^{1/n} \le \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$, где $x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0$. Прежде всего заметим, что если умножить все числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ на общий множитель $\lambda > 0$, то обе части неравенства умножатся на λ, и неравенство сохранится (т.е. останется верным, если было верным раньше). Тем самым достаточно доказать неравенство для чисел $x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0$ таких, что $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ — то есть доказать для таких чисел неравенство $x_1 x_2 \dots x_n \le 1/n^n$.

Множество $T_n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 + \dots + x_n = 1, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \dots, x_n \ge 0\}$ ограничено (поскольку если $(x_1, \dots, x_n) \in T_n$, то $0 \le x_i \le 1$ для всякого $i = 1, \dots, n$) и замкнуто (поскольку является пересечением замкнутых множеств — гиперплоскости $x_1 + \dots + x_n = 1$ и полупространств $x_1 \ge 0, \dots, x_n \ge 0$). Функция

$f(x_1,\dots,x_n) = x_1\dots x_n$ непрерывна как функция $f: T_n \to \mathbb{R}$ и, следовательно, достигает наибольшего значения в некоторой точке $(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Пусть $y_1 > y_2$. Тогда точка $((y_1+y_2)/2, (y_1+y_2)/2, y_3, \dots, y_n)$ принадлежит T_n и в то же время $f((y_1+y_2)/2, (y_1+y_2)/2, y_3, \dots, y_n) = (y_1+y_2)^2 y_3 \dots y_n/4 > y_1 y_2 y_3 \dots y_n = f(y_1,\dots,y_n)$ в силу неравенства $(y_1+y_2)^2/4 - y_1y_2 = (y_1-y_2)^2/4 > 0$. Это противоречит тому, что значение $f(y_1,\dots,y_n)$ — наибольшее на T_n. Тем самым $y_1 = y_2$ и, в силу очевидной симметрии, $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 1/n$. Поэтому получается, что для произвольной точки $(x_1,\dots,x_n) \in T_n$ имеет место неравенство $x_1\dots x_n \le f(1/n,\dots,1/n) = 1/n^n$.

Теорема 2. *В компактном топологическом пространстве X всякое бесконечное подмножество имеет предельную точку.*

Доказательство. Пусть $Y \subset X$ бесконечно и не имеет предельных точек. Тогда каждая точка $a \in X$ имеет окрестность U_a, пересекающую Y только в конечном числе точек. Множества U_a, $a \in X$ образуют покрытие пространства X. Выберем из него конечное подпокрытие $U_1,\dots,U_N$. Каждое из множеств U_i содержит только конечное число точек множества Y, что противоречит бесконечности Y. □

Следствие 2. *Всякая последовательность действительных чисел содержит либо сходящуюся подпоследовательность, либо подпоследовательность с пределом ∞. Всякая ограниченная последовательность содержит сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из компактности пространства $\widetilde{\mathbb{R}}$ (оно компактно, поскольку гомеоморфно окружности). Второе — из компактности отрезка. □

Имеет место такое обобщение принципа вложенных отрезков:

Теорема 3. *Пусть $X_1 \supset X_2 \supset \dots$ — последовательность вложенных непустых отделимых компактов. Тогда $\bigcap_n X_n \ne \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $U_k = X_1 \setminus X_k$, где $k = 2, 3, \dots$. Множества U_k открыты в силу отделимости. Если $\bigcap_n X_n = \varnothing$, то эти множества образуют покрытие компакта X_1. Следовательно, из него можно выбрать конечное подпокрытие $U_{k_1},\dots,U_{k_n}$. Без ограничения общности $k_1 < \dots < k_n$, откуда вытекает, что $U_{k_1} \subset \dots \subset U_{k_n}$, и $X_1 = \bigcup_{s=1}^n U_{k_s} = U_{k_n} = X_1 \setminus X_{k_n}$, что противоречит непустоте X_{k_n}. □

Множество X называется *метрическим пространством*, если задана функция (*метрика*, или *расстояние*) $\varrho: X \times X \to \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

1) (неотрицательность и невырожденность) $\varrho(a,b) \ge 0$ для всех $a, b \in X$, причем $\varrho(a,b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$.
2) (симметричность) $\varrho(a,b) = \varrho(b,a)$.
3) (неравенство треугольника) $\varrho(a,c) \le \varrho(a,b) + \varrho(b,c)$.

Всякое метрическое пространство можно канонически наделить топологией: базу окрестностей составляют шары $B_r(a) \overset{\text{def}}{=} \{b \in X \mid \varrho(a,b) < r\}$ со всевозможными центрами $a \in X$ и радиусами $r > 0$. Тот факт, что шары составляют базу окрестностей, следует из неравенства треугольника: действительно, пусть $b \in B_{r_1}(a_1) \cap B_{r_2}(a_2)$. Тогда если $\varrho(b,c) < r \overset{\text{def}}{=} \min(r_1 - \varrho(b,a_1), r_2 - \varrho(b,a_2))$, то $\varrho(c,a_1) < r_1$ и $\varrho(c,a_2) < r_2$. Отсюда следует, что $B_r(b) \subset B_{r_1}(a_1) \cap B_{r_2}(a_2)$, то есть множество $B_{r_1}(a_1) \cap B_{r_2}(a_2)$ открыто.

Примеры метрических пространств:

Пример 5. Пространство $\mathbb{R}$: метрика определяется формулой $\varrho(a,b) = |a-b|$.

Пример 6. Если X — метрическое пространство, то его произвольное подмножество $Y \subset X$ тоже метрическое — метрика получается ограничением метрики в X на Y. Очевидно, топология, порождаемая метрикой на Y, совпадает с топологией, индуцированной из X. Так, пространство $\overline{\mathbb{N}}$ можно наделить метрикой (порождающей стандартную топологию этого пространства), поскольку оно гомеоморфно множеству $\{0, 1, 1/2, 1/3, \dots\} \subset \mathbb{R}$.

Пример 7. Декартово произведение $X = X_1 \times X_2$ двух метрических пространств с метриками ϱ_1 и ϱ_2 можно наделить метрикой $\varrho((a_1,a_2),(b_1,b_2)) = \varrho_1(a_1,b_1) + \varrho_2(a_2,b_2)$ (проверьте свойства !). Топология, порожденная метрикой ϱ, совпадает с топологией декартова произведения. Разумеется, это можно обобщить на декартово произведение $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ нескольких метрических пространств.

В случае $\mathbb{R}^n$ эта конструкция дает так называемую метрику ℓ_1: расстояние между точками $(x_1,\dots,x_n)$ и $(y_1,\dots,y_n)$ равно $\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$. Чаще пользуются так называемой метрикой ℓ_2, где это расстояние равно $\left(\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2\right)^{1/2}$ (проверьте, что это метрика !). Топологии, порождаемые этими метриками, совпадают (почему ?).

Отображение $f: Y \to X$, где X — метрическое пространство, а Y — произвольное топологическое, называется фундаментальным в точке a, если $\lim_{y,z\to a} \varrho(f(y), f(z)) = 0$, где предел рассматривается в топологическом пространстве $(Y \setminus \{a\})^2$.

Теорема 4. *Если отображение f имеет предел в точке a, то оно фундаментально в этой точке.*

Доказательство такое же, как для случая $X = \mathbb{R}$.

Метрическое пространство X называется полным, если всякое отображение $f : Y \to X$, фундаментальное в точке a, имеет предел при $y \to a$.

Теорема 5. *Метрическое пространство $\mathbb{R}$ полно.*

Доказательство. Пусть функция $f : Y \to \mathbb{R}$ фундаментальна в точке $a \in Y$. Тогда найдется окрестность $U \subset Y$ точки a, в которой f ограничена. Обозначим U_n такую окрестность точки a, что $\varrho(f(y), f(z)) < 1/n$ при $y, z \in U_n \setminus \{a\}$. Без ограничения общности $U \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots$.

Положим $A_n \overset{\text{def}}{=} \sup_{x \in U_n \setminus \{a\}} f(x)$. Поскольку $U \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots$, последовательность A_n убывает и ограничена снизу — следовательно, она имеет предел, который обозначим A. Теперь для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое n, что $|A_n - A| < \varepsilon/2$ и $|f(y) - A_n| \le 1/n < \varepsilon/2$ при $y \in U_n \setminus \{a\}$ — следовательно, при $y \in U_n \setminus \{a\}$ имеет место неравенство $|f(y) - A| < \varepsilon$, откуда вытекает, что $\lim_{y \to a} f(y) = A$. $\square$

Теорема 6. *Декартово произведение двух полных метрических пространств полно. Замкнутое подмножество полного метрического пространства полно.*

Доказательство первого утверждения — упражнение. Второе утверждение вытекает из предложения 1.

Следствие 3. *Замкнутое подмножество $\mathbb{R}^n$ — полное метрическое пространство.*