ЛЕКЦИЯ 6

Краткое содержание. Пополнение метрического пространства. p-адический диск и канторово множество.

Говорят, что множество $Y \subset X$ плотно в топологическом пространстве X, если $\overline{Y} = X$.

Теорема 1. *Для всякого метрического пространства Y существует полное метрическое пространство X (называемое пополнением Y) и отображение $\iota : Y \to X$, сохраняющее расстояние и такое, что $\iota(Y) \subset X$ плотно в X. Метрическое пространство X единственно с точностью до изометрии — взаимно однозначного отображения, сохраняющего расстояние.*

Доказательство. Две последовательности p_n, q_n в пространстве Y назовем эквивалентными, если $\varrho(p_n, q_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Очевидно, это отношение эквивалентности и последовательность, эквивалентная фундаментальной, фундаментальна.

Возьмем в качестве X множество классов эквивалентности фундаментальных последовательностей в Y, а отображение ι определим равенством $\iota(y) = (y, y, \dots)$. Для двух фундаментальных последовательностей $p_n, q_n \in Y$ последовательность расстояний $\varrho(p_n, q_n) \in \mathbb{R}$ также фундаментальна (в силу неравенства $|\varrho(p_n, q_n) - \varrho(p_m, q_m)| \le \varrho(p_m, p_n) + \varrho(q_m, q_n)$, где ϱ — метрика в Y) и, следовательно, сходится; определим метрику в X равенством $\varrho_X(p, q) = \lim_{n\to\infty} \varrho(p_n, q_n)$.

Пространство X полно — доказательство такое же, как для $\mathbb{R}$: сначала доказывается, что всякая фундаментальная последовательность элементов X сходится (аналог теоремы 1 лекции 2), а затем из этого выводится, что всякое фундаментальное отображение имеет предел (аналог теоремы 5 лекции 5). Всякий элемент $(y_1, y_2, \dots) \in X$ является пределом последовательности $\iota(y_1), \iota(y_2), \dots$ элементов $\iota(Y)$ (доказывается это так же, как предложение 3 лекции 2), откуда вытекает, что $\iota(Y)$ плотно в X.

Пусть теперь X_1, X_2 — два пополнения пространства Y. Заметим, что поскольку отображение ι сохраняет расстояние, оно переводит различные точки в различные (точки различны, если расстояние между ними отлично от нуля), то есть является вложением. Пусть ι_1, ι_2 — соответствующие вложения. Определим отображение $f : \iota_1(Y) \to \iota_2(Y)$ равенством $f = \iota_2 \circ \iota_1^{-1}$; очевидно, f взаимно однозначно и сохраняет расстояние.

Пусть теперь $x \in X_1 \setminus \iota_1(Y)$. Тогда найдется такая последовательность $y_n \in Y$, что $x = \lim_{n\to\infty} \iota_1(y_n)$. Последовательность $\iota_1(y_n)$ сходится, поэтому фундаментальна. Следовательно, фундаментальна и последовательность $\iota_2(y_n) = f(y_n) \in \iota_2(Y) \subset X_2$. Следовательно, у нее есть предел $\lim_{n\to\infty} \iota_2(y_n) \overset{\text{def}}{=} f(x)$.

Приведенное определение $f(x)$ корректно: если $x = \lim_{n\to\infty} \iota_1(z_n)$, то $\lim_{n\to\infty} \varrho(y_n, z_n) = 0$, откуда $\lim_{n\to\infty} \varrho(\iota_2(z_n), \iota_2(y_n)) = 0$ и $\lim_{n\to\infty} \iota_2(z_n) = \lim_{n\to\infty} \iota_2(y_n)$. Очевидно, f сохраняет расстояние (и, следовательно, непрерывно). В силу симметрии конструкции найдется также и отображение $g : X_2 \to X_1$, совпадающее на $\iota_2(Y)$ с отображением $\iota_1 \circ \iota_2^{-1} = f^{-1}$. Тем самым $f \circ g = \mathrm{id}$ на плотном множестве $\iota_2(Y) \subset X_2$. В силу непрерывности это равенство верно и на всем X_2. Аналогично доказывается, что $g \circ f = \mathrm{id}_{X_1}$ — следовательно, f взаимно однозначно и $g = f^{-1}$. □

Пример 1. Пополнение $\mathbb{Q}$ есть $\mathbb{R}$.

Пример 2. Зафиксируем простое число p и рассмотрим в $\mathbb{Q}$ следующую метрику. Всякое рациональное число однозначно записывается в виде $x = a/b \cdot p^k$, где $k \in \mathbb{Z}$, а числа a и b на p не делятся. Тогда положим $|x|_p \overset{\text{def}}{=} p^{-k}$, и $\varrho(x, y) \overset{\text{def}}{=} |x - y|_p$.

Проверим, что ϱ — метрика. Невырожденность и симметрия очевидны, доказать следует только неравенство треугольника. Пусть $t, s \in \mathbb{Q}$, и $t = a/b \cdot p^k$, $s = c/d \cdot p^l$, причем $k < l$ Тогда $t + s = \frac{ad+bcp^{l-k}}{bd} \cdot p^k$ — стандартное представление, поскольку числа $ad+bcp^{l-k}$ и bd не делятся на p. Следовательно, $|t+s|_p = p^{-k} = \max(|t|_p, |s|_p)$. Если же $k = l$, то $t + s = p^k(ad + bc)/bd$; число bd на p не делится, откуда $|t+s|_p \le p^{-k} = |t|_p = |s|_p$. Так что во всяком случае имеет место неравенство $\varrho(x, z) = |x - z|_p \le \max(|x - y|_p, |y - z|_p) \le |x - y|_p + |y - z|_p = \varrho(x, y) + \varrho(y, z)$.

Пополнение $\mathbb{Q}$ по построенной метрике обозначается $\mathbb{Q}_p$ и называется множеством p-адических чисел. Множество $\mathbb{Q}_p$ является полем — операции сложения и умножения переносятся на $\mathbb{Q}_p$ по непрерывности из поля $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$, в точности как для вещественных чисел. Норма $|\cdot|_p$ обладает легко проверяемым свойством мультипликативности: $|xy|_p = |x|_p\ |y|_p$.

Лемма 1. *Ряд $\sum_n a_n$, где $a_n \in \mathbb{Q}_p$ сходится тогда и только тогда, когда $\lim_{n\to\infty} |a_n|_p = 0$.*

Доказательство. Согласно критерию Коши, ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм фундаментальна, т.е. $\lim_{m,n\to\infty} \left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right|_p = 0$. Но $\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right|_p \le \max(\left|a_m\right|_p, \left|a_{m+1}\right|_p, \ldots, \left|a_n\right|_p)$, поэтому фундаментальность эквивалентна равенству $\lim_{n\to\infty} \left|a_n\right|_p = 0$. □

Лемма 2. *Пусть $x \in \mathbb{Q}_p$ и $\left|x\right|_p \le 1$. Тогда существует такое $r \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, что $\left|x-r\right|_p \le 1/p$.*

Доказательство. Предположим сначала, что лемма доказана для всех $y \in \mathbb{Q}$, и пусть $x \in \mathbb{Q}_p$. Поскольку $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$ плотно, то найдется последовательность $y_n \in \mathbb{Q}$, сходящаяся к x. Для каждого y_n найдется свое $r_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ — следовательно, существует бесконечное количество номеров n таких, что соответствующие числа r_n равны друг другу. Тем самым без ограничения общности можно считать, что $r_1 = r_2 = \cdots = r \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Но тогда $\left|x-r\right|_p = \lim_{n\to\infty} \left|y_n - r\right| \le 1/p$.

Тем самым достаточно доказать лемму для $x \in \mathbb{Q}$. Пусть $x = a/b$. Неравенство $\left|x\right|_p \le 1$ означает, что b не делится на p. Тогда существуют такие $u, v \in \mathbb{Z}$, что $1 = ub + vp$. Положим $r \equiv au \bmod p$. Тогда $a = abu + avp \equiv rb \bmod p$, откуда $x - r = (a - rb)/b$ — числитель делится на p, а знаменатель нет. Следовательно, $\left|x-r\right|_p \le 1/p$. □

Предложение 1. *Всякое число $x \in \mathbb{Q}_p$ однозначно представляется в виде суммы ряда $x = \sum_{n=k}^{\infty} a_n p^n$, где $\left|x\right|_p \stackrel{def}{=} p^{-k}$ и $a_n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ для всех n. Обратно, всякий ряд такого вида сходится к некоторому p-адическому числу.*

Доказательство. Последнее утверждение вытекает из леммы 1, поскольку $\left|a_n p^n\right|_p = 1/p^n \to 0$ при $n \to \infty$. Докажем существование ряда. Пусть $\left|x\right|_p = p^{-k}$, тогда $\left|p^{-k}x\right|_p = 1$, и согласно лемме 2 существует $a_0 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ такое, что $\left|p^{-k}x - a_0\right| \le 1/p$, или $\left|x - p^k a_0\right|_p \le p^{-k-1}$. Применяя лемму 2 еще раз, получим, что существует $a_1 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$, для которого $\left|x - p^k a_0 - p^{k+1} a_1\right|_p \le p^{-k-2}$, и т.д. по индукции. Следовательно, $\left|x - \sum_{n=k}^{N} a_n p^n\right|_p \to 0$ при $N \to \infty$, и ряд существует.

Единственность: пусть $\sum_{n=k}^{\infty} a_n p^n = \sum_{n=k}^{\infty} b_n p^n$. Тогда $0 = (a_k - b_k)p^k + yp^{k+1}$, где $y = \sum_{n=k+1}^{\infty} (a_n - b_n)p^{n-k-1}$. Имеем $\left|y\right|_p \le \max_{n=k+1,k+2,\ldots}(\left|a_n - b_n\right|_p p^{k-n-1}) = 1$ (поскольку $\left|a_n - b_n\right|_p = 1$ при всех n), откуда $\left|a_k - b_k\right| \le 1/p$, что возможно только при $a_k = b_k$. Теперь $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n p^n = \sum_{n=k+1}^{\infty} b_n p^n$, откуда таким же образом заключаем, что $a_{k+1} = b_{k+1}$, и т.д. □

Таким образом, $\mathbb{Q}_p$ можно отождествить с множеством "бесконечных p-ичных дробей" $a_{-k} \ldots a_0.a_1 a_2 \ldots$. В отличие от $\mathbb{R}$, представление p-адического числа в виде такой дроби единственно: нет равенств типа $0.(9) = 1.(0)$.

Пусть $K \subset [0, 1]$ — множество действительных чисел, представимых бесконечными троичными дробями, не содержащими цифры 1 (в частности, $1 = 0.(2) \in K$). Сопоставим каждому элементу $x = 0.b_0 b_1 \cdots \in K$ число $y(x) \in \mathbb{Q}_2$, заданное формулой $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n/2)2^n$. Тогда $\left|y(x)\right|_2 \le 1$ и, согласно предложению, отображение $y : K \to B_1(0)$ является взаимно однозначным. Здесь $B_1(0) \subset \mathbb{Q}_p$ — замкнутый шар радиуса 1 с центром в нуле. Нетрудно проверить также (проделайте !), что y — гомеоморфизм. K называется канторовым множеством. Нетрудно видеть, что K замкнуто и, следовательно, компактно — таким образом, шары в $\mathbb{Q}_2$ компактны (аналогично можно доказать, что и в других пространствах $\mathbb{Q}_p$ тоже). Также нетрудно убедиться, что $K = B_1(0)$ несвязно и не содержит ни одного связного подмножества, отличного от точки ("бесконечно дыряво").