ЛЕКЦИЯ 7

Краткое содержание. Равномерная сходимость. Существование интеграла Римана от непрерывной функции. Формула Ньютона–Лейбница. Теоремы о промежуточной точке.

Пусть X и Z — метрические пространства, а Y — произвольное множество, и пусть заданы отображения $f : X \times Y \to Z$, $f_0 : Y \to Z$ и $x_0 : Y \to X$. Говорят, что $f(x, y)$ сходится к $f_0(y)$ при $x \to x_0(y)$ равномерно по $y \in Y$ (обозначение $f(x, y) \rightrightarrows f_0(y)$ при $x \to x_0(y)$), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякого $y \in Y$ и всякого $x \in B_\delta(x_0(y))$ имеет место включение $f(x, y) \in B_\varepsilon(f_0(y))$.

Теорема 1. *Пусть X, Y, Z — метрические пространства, $a \in X$, $b \in Y$, $K \in Z$, и $f : X \times Y \to Z$ — отображение. Пусть $f(x, y) \to g(y)$ при $x \to a$ равномерно по $y \in Y$, $f(x, y) \to h(x)$ при $y \to b$, и $g(y) \to K$ при $y \to b$. Тогда $h(x) \to K$ при $x \to a$ и $f(x, y) \to K$ при $(x, y) \to (a, b)$.*

Замечание. Сходимость $f(x, y) \to h(x)$ может и не быть равномерной !

Доказательство. Равномерная сходимость $f(x, y) \to g(y)$ означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_1 > 0$ такое, что при $\varrho_X(x, a) < \delta_1$ и произвольном $y \in Y$ выполнено неравенство $\varrho_Z(f(x, y), g(y)) < \varepsilon/2$. Сходимость $g(y) \to K$ означает, что найдется $\delta_2 > 0$ такое, что при $\varrho_Y(y, b) < \delta_2$ выполнено неравенство $\varrho_Z(g(y), K) < \varepsilon/2$. Поэтому при $(x, y) \in B_X(a, \delta_1) \times B_Y(b, \delta_2)$ выполнено условие $\varrho_Z(f(x, y), K) \le \varrho_Z(f(x, y), g(y)) + \varrho_Z(g(y), K) < \varepsilon$, откуда $f(x, y) \to K$ при $(x, y) \to (a, b)$.

Выберем теперь какое-нибудь $y \in B_Y(b, \delta_2)$. Сходимость $f(x, y) \to h(x)$ означает, что найдется $\delta_3 > 0$ такое, что при $x \in B_X(a.\delta_3)$ выполнено неравенство $\varrho_Z(h(x), f(x, y)) < \varepsilon$. Без ограничения общности $\delta_3 \le \delta_1$, откуда при $x \in B_X(a.\delta_3)$ имеем $\varrho_Z(h(x), K) \le \varrho_Z(h(x), f(x, y)) + \varrho_Z(f(x, y), K) < 2\varepsilon$, откуда $h(x) \to K$ при $x \to a$. □

Пример 1. Пусть функция $f : \mathbb{R} \times [a, b] \to \mathbb{R}$ такова, что $\int_a^b f(\alpha, x)\, dx$ сходится равномерно по $\alpha \in U$, где U — некоторая окрестность точки $p \in \mathbb{R}$. Тогда $\left(\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(\alpha, x)\, dx\right)_{\alpha=p} = \int_a^b \left(\frac{d}{d\alpha} f(\alpha, x)\right)_{\alpha=p} dx$. Действительно, $\left(\frac{d}{d\alpha}\int_a^b f(\alpha, x)\, dx\right)_{\alpha=p} = \lim_{h\to 0}\lim_{\mu(\tau)\to 0} \frac{1}{h}(I_a^b(f(p + h, \cdot), \tau) - I_a^b(f(p, \cdot), \tau)) = (*)$. В силу равномерности пределы можно переставить: $(*) = \lim_{\mu(\tau)\to 0}\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(I_a^b(f(p + h, \cdot), \tau) - I_a^b(f(p, \cdot), \tau)) =$
$\lim_{\mu(\tau)\to 0} I_a^b(\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h,\cdot)-f(p,\cdot)}{h}) = \int_a^b \left(\frac{d}{d\alpha} f(\alpha, x)\right)_{\alpha=p} dx$

Пример 2. Непрерывность отображения f в точке a означает, что $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Поэтому из теоремы 1 вытекает такое утверждение:

Теорема 2 (упрощенная форма). *Пусть X, Y, Z — метрические пространства, $a \in X$ и $f : X \times Y \to Z$ — отображение. Пусть для всякого $x \in X$ отображение $f_x : Y \to Z$, заданное равенством $f_x(y) = f(x, y)$, непрерывно. Пусть $f(x, y) \to g(y)$ при $x \to a$ равномерно по $y \in Y$. Тогда отображение $g : Y \to Z$ также непрерывно.*

Коротко: равномерный предел непрерывных отображений непрерывен.

Доказательство. Для всякого $b \in Y$ имеем $\lim_{y\to b} g(y) = \lim_{y\to b}\lim_{x\to a} f(x, y) = \lim_{x\to a}\lim_{y\to b} f(x, y)$ (по теореме 1) $= \lim_{x\to a} f(x, b)$ (в силу непрерывности отображения $f_x : Y \to Z$ в точке b) $= g(b)$. □

Следствие 1. *Пусть $f_n : Y \to Z$ — последовательность непрерывных отображений, равномерно по $y \in Y$ сходящаяся (при $n \to \infty$) к отображению $f : Y \to Z$. Тогда отображение f также непрерывно.*

Действительно, пространство $X = \mathbb{N}$ дискретно, поэтому непрерывность по $n \in \mathbb{N}$ имеет место всегда.

На самом деле теорему 2 можно слегка обобщить и усилить: нет необходимости считать Y метрическим пространством, и, кроме того, точка a сама может зависеть от y (непрерывным образом):

Теорема 2 (полная форма). *Пусть Y — топологическое пространство, X, Z — метрические, и $f : X \times Y \to Z$ — отображение. Пусть отображение $a : Y \to X$ непрерывно, и для всякого $x \in X$ отображение $f_x : Y \to Z$, заданное равенством $f_x(y) = f(x, y)$, также непрерывно. Пусть $f(x, y) \to g(y)$ при $x \to a(y)$ равномерно по $y \in Y$. Тогда отображение $g : Y \to Z$ также непрерывно.*

Доказательство. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что такая, что $\varrho(f(x, y), a(y)) < \varepsilon/3$ для всех $y \in Y$ и всех $x \in B_\delta(a(y))$. Докажем, что отображение g непрерывно в точке $b \in Y$. В силу непрерывности отображения a существует такое $x_* \in X$, что $x_* \in B_\delta(a(y))$ при всех y, принадлежащих некоторой

окрестности $U \subset Y$ точки b. Отображение f_{x_*} непрерывно, поэтому можно, если необходимо, уменьшить окрестность U так, чтобы при $y \in U$ выполнялось также и неравенство $\varrho(f(x_*, y), f(x_*, b)) < \varepsilon/3$. Тогда для $y \in U$ выполнено неравенство $\varrho_Z(g(y), g(b)) \le \varrho(g(y), f(x_*, y)) + \varrho(f(x_*, y), f(x_*, b)) + \varrho(f(x_*, b), g(b)) < \varepsilon$. □

Пример 3. В теореме 2 условие равномерности существенно. Действительно, пусть $Y = [0, 1]$, $X = \overline{\mathbb{N}}$, $Z = \mathbb{R}$ $a = \infty$, $f(n, y) = y^n$. Тогда $g(y) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} f(n, y)$ — разрывная функция, равная 0 при $0 \le y < 1$ и 1 при $y = 1$.

Отображение $f : X \to Y$, где X, Y — метрические пространства, называется равномерно непрерывным, если $f(x) \to f(a)$ при $x \to a$ равномерно по $a \in X$.

Пример 4. Функция $y = \sin x$ — равномерно непрерывное отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Действительно, $|\sin y - \sin a| \le |y - a|$ для всех $y, a \in \mathbb{R}$, откуда $\forall \varepsilon > 0 \forall a \in \mathbb{R}\ |y - a| < \varepsilon \Rightarrow |\sin y - \sin a| < \varepsilon$. Функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывным отображением $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Действительно, $\forall \delta > 0 \exists x, a\ |x - a| < \delta$, $|x^2 - a^2| \ge 1$ — достаточно взять $a = x + \delta$, $x \ge 2/\delta$.

Теорема 3. *Отображение, непрерывное на метрическом компакте, равномерно непрерывно на нем.*

Доказательство. Предположим обратное: $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, X — компактное метрическое пространство, Y — произвольное, но равномерной непрерывности нет: существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всякого n имеются точки $a_n, b_n \in X$, для которых $\varrho_X(a_n, b_n) < 1/n$, но $\varrho_Y(f(a_n), f(b_n)) \ge \varepsilon_0$. В силу компактности X у множеств $\{a_1, a_2, \ldots\}$ и $\{b_1, b_2, \ldots\}$ имеются предельные точки a и b соответственно; в силу равенства $\lim_{n\to\infty} \varrho_X(a_n, b_n) = 0$ эти точки совпадают: $a = b$. Выберем из последовательностей a_n и b_n подпоследовательности, сходящиеся к a, обозначив эти подпоследовательности опять a_n, b_n. Тогда $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a) = f(b) = \lim_{n\to\infty} f(b_n)$, вопреки неравенству $\varrho_X(f(a_n), f(b_n)) \ge \varepsilon_0$. □

Следствие 2. *Всякая функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на нем по Риману.*

Иными словами, существует предел $\int_a^b f(x)\,dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\mu(\tau)} I_a^b(f, \tau)$, где $\tau = (x_0 = a, x_1, \ldots, x_{2N} = b)$ — разбиение отрезка $[a, b] \in \mathbb{R}$, $\mu(\tau) = \max_i |x_i - x_{i+1}|$ — его мелкость, а $I_a^b(f, \tau) = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_{2i+1})(x_{2i+2} - x_{2i})$ — интегральная сумма Римана (или Дарбу).

Доказательство. Проверим, что отображение из пополненного пространства разбиений отрезка $[a, b]$ в $\mathbb{R}$, сопоставляющее каждому разбиению $\tau = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b\}$ его сумму Римана $I_a^b(f, \tau) = \sum_{k=0}^{N/2} f(x_{2k+1})(x_{2k+2} - x_{2k})$, фундаментально в точке ∞ ("идеальном разбиении с мелкостью 0"). Пусть $\varepsilon > 0$. По теореме 3 для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x, y \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|x - y| < \delta$, выполнено неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/(2(b - a))$. Пусть теперь τ_1, τ_2 — два разбиения с мелкостью, меньшей δ. Образуем разбиение τ, объединяя все точки, вошедшие в τ_1 и τ_2 (иногда такое разбиение обозначают $\tau_1 \cup \tau_2$ или $\max(\tau_1, \tau_2)$). Тогда, очевидно, $|I_a^b(f, \tau) - I_a^b(f, \tau_1)| < \varepsilon/2$, и то же самое верно для τ_2. Следовательно, $|I_a^b(f, \tau_1) - I_a^b(f, \tau_2)| < \varepsilon$, и фундаментальность установлена. Теперь существование интеграла следует из полноты $\mathbb{R}$. □

Для практического вычисления интеграла Римана используется

Теорема 4 (формула Ньютона–Лейбница). *Если функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна, то $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$. Если функция $f'(x)$ существует и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$.*

Для доказательства теоремы Ньютона–Лейбница нам потребуются несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Если f интегрируема на отрезке $[a, b]$ и неотрицательна, то $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$.*

Доказательство очевидно. Отсюда вытекает, что если $f(x) \le g(x)$ при $x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

Лемма 2. *Если функция f интегрируема на отрезках $[a, b]$, $[b, c]$ и $[a, c]$, то $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$.*

Доказательство. Пусть τ_n — последовательность разбиений отрезка $[a, c]$ с мелкостью, стремящейся к 0 и таких, что точка b является одной из точек разбиения. Поскольку $\int_a^c f(x)\,dx$ существует, он равен $\lim_{n\to\infty} I_a^c(f, \tau_n)$. Очевидно, $I_a^c(f, \tau_n) = I_a^b(f, \tau_n') + I_b^c(f, \tau_n'')$, где τ_n', τ_n'' — разбиения отрезков $[a, b]$ и $[b, c]$, полученные ограничением на эти отрезки разбиения τ_n. Но $\lim_{n\to\infty} I_a^b(f, \tau_n') = \int_a^b f(t)\,dt$, и аналогично для τ_n''. □

Доказательство первого утверждения теоремы Ньютона–Лейбница. Пусть $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x f(t)\,dt$. Тогда по лемме 2 $(F(x + y) - F(x))/y = \frac{1}{y}\int_x^{x+y} f(t)\,dt$. Поэтому по лемме 1 $\inf_{t\in[x,x+y]} f(t) \le (F(x + y) - F(x))/y \le \sup_{t\in[x,x+y]} f(t)$. В силу непрерывности f в точке x получаем, что $\lim_{y\to 0} \inf_{t\in[x,x+y]} f(t) = f(x)$, и то же самое верно для точной верхней грани. □

Лемма 3. *Если $f'(x) = 0$ при всех $x \in [a,b]$, то $f(x) = const$.*

Лемма 3 будет доказана позднее.

Доказательство второго утверждения теоремы Ньютона–Лейбница. Пусть $g(x) = \int_a^x f'(t)\,dt$. В силу первого утверждения теоремы, $g'(x) = f'(x)$ для всех $x \in [a,b]$. Из леммы 3 вытекает, что $g(x) = f(x) + c$, где c — некоторая константа. Поскольку $g(a) = 0$, получаем $c = -f(a)$, и $\int_a^b f'(t)\,dt = g(b) = f(b) - f(a)$. □

Предложение 1 (теорема Ферма). *Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ достигает в точке x_* локального максимума: $f(x_*) \geq f(x)$ для всякого x из некоторой окрестности U точки x_*. Тогда если $f'(x_*)$ существует, то $f'(x_*) = 0$.*

Доказательство. $(f(x) - f(x_*))/(x - x_*) \leq 0$ при $x > x_*$ и ≥ 0 при $x < x_*$ (предполагается, что $x \in U$). Поэтому $f'(x_*) = \lim_{x \to x_*}(f(x) - f(x_*))/(x - x_*) = 0$. □

Аналогичный результат верен для точки локального минимума.

Предложение 2. *Если функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ имеет производную в каждой точке отрезка $[a,b]$, то f непрерывна.*

Доказательство. Докажем непрерывность в точке $c \in [a,b]$. Поскольку предел $f'(c) = \lim_{x \to c}(f(x) - f(c))/(x - c)$ существует, выражение $R_c(x) = (f(x) - f(c))/(x - c)$ ограничено в некоторой окрестности U точки c: $m \leq R_c(x) < M$. Тогда $|f(x) - f(c)| < \max(M, m)\,|x - c|$ и, следовательно, $f(x) \to f(c)$ при $x \to c$. □

Следствие 3 (теорема Ролля). *Пусть функция f дифференцируема на отрезке $[a,b]$ и $f(a) = f(b)$. Тогда существует точка $x_* \in (a,b)$ такая, что $f'(x_*) = 0$.*

Доказательство. Если $f(x) = const$. при $x \in [a,b]$, то в качестве точки ξ можно взять любую точку. Пусть $f(x) \neq const$. По предложению 2 f непрерывна на $[a,b]$ и, следовательно, достигает на нем наибольшего и наименьшего значения. Поскольку $f(a) = f(b)$, хотя бы одно из этих значений достигается в точке $x_* \in (a,b)$. По предложению 1 $f'(x_*) = 0$. □

Теорема 5 (Коши о промежуточном значении). *Пусть $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ — дифференцируемые функции. Тогда существует точка $x_* \in (a,b)$, в которой $g'(x_*)(f(b) - f(a)) = f'(x_*)(g(b) - g(a))$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $u(x) = \begin{vmatrix} f(b) - f(a) & f(x) \\ g(b) - g(a) & g(x) \end{vmatrix}$. Функция u дифференцируема на $[a,b]$; имеем $u(a) = \begin{vmatrix} f(b) - f(a) & f(a) \\ g(b) - g(a) & g(a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f(b) & f(a) \\ g(b) & g(a) \end{vmatrix}$ и $u(b) = \begin{vmatrix} f(b) - f(a) & f(b) \\ g(b) - g(a) & g(b) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -f(a) & f(b) \\ -g(a) & g(b) \end{vmatrix} = u(b)$. По теореме Ролля найдется $x_* \in (a,b)$, в которой $0 = u'(x_*) = \begin{vmatrix} f(b) - f(a) & f'(x_*) \\ g(b) - g(a) & g'(x_*) \end{vmatrix}$. □

Полагая $g(x) \equiv x$, получаем

Следствие 4 (теорема Лагранжа). *Пусть функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ имеет производную в каждой точке отрезка $[a,b]$. Тогда найдется точка $x_* \in [a,b]$ такая, что $f(b) - f(a) = f'(x_*)(b - a)$.*

Отсюда, в свою очередь, вытекает лемма 3.