ЛЕКЦИЯ 8

Краткое содержание. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в интегральной форме. Сходимость рядов Тейлора некоторых функций.

Лемма 1. *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция, имеющая в некоторой окрестности нуля производные до $n-1$-й включительно, а в нуле — также и n-ую производную. Пусть выполнены равенства $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0$. Тогда $f(x) = o(x^n)$ при $x \to 0$.*

Доказательство. При $n = 1$ утверждение следует из определения производной: если $f(0) = 0$ и $0 = f'(0) = \lim_{x\to 0}(f(x) - f(0))/x = \lim_{x\to 0} f(x)/x$, то есть $f(x) = o(x)$.

При произвольном n по формуле Лагранжа (следствие 4 лекции 7) для всякого x существуют точки $\xi_1(x) \in [0, x]$, $\xi_2(x) \in [0, \xi_1(x)] \subset [0, x]$, $\ldots$, $\xi_{n-1}(x) \in [0, \xi_{n-2}(x)] \subset \cdots \subset [0, x]$ такие, что $f(x) = f(x) - f(0) = f'(\xi_1(x))x = (f'(\xi_1(x)) - f'(0))x = f''(\xi_2(x))x\xi_1 = \cdots = f^{(n-1)}(\xi_{n-1}(x))x\xi_1 \ldots\xi_{n-1}$. Функция $g(x) = f^{(n-1)}(x)$ удовлетворяет, согласно условию, равенству $g(0) = g'(0) = 0$, поэтому в силу уже доказанного $f^{(n-1)}(\xi_{n-1}(x)) = g(\xi_{n-1}(x)) = o(\xi_{n-1}(x)) = o(x)$ при $x \to 0$, откуда $f(x) = o(x)x\xi_1 \ldots\xi_{n-1} = o(x^n)$. □

Теорема 1 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — функция, имеющая в некоторой окрестности нуля производные до $n-1$-й включительно, а в нуле — также и n-ую производную. Тогда асимптотическое равенство $f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + o(x^n)$ при $x \to 0$ имеет место тогда и только тогда, когда $c_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(0)$ при всех $k = 0, \ldots, n$.*

Доказательство. Функция $g(x) = f(x) - (f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2/2 + \cdots + f^{(n)}(0)x^n/n!)$ удовлетворяет условиям леммы и поэтому есть $o(x^n)$ при $x \to 0$. С другой стороны, если $f(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + o(x^n)$ при $x \to 0$, то $(c_0 - f(0)) + (c_1 - f'(0))x + (c_2 - f''(0)/2)x^2 + \cdots + (c_n - f^{(n)}(0)/n!)x^n = o(x^n)$ при $x \to 0$, откуда следует, что все коэффициенты равны нулю. □

Разумеется, вместо точки 0 можно использовать любую другую точку $a \in \mathbb{R}$ — разложение тогда будет по степеням $(x - a)^n$.

Пример 1. (все разложения при $x \to 0$)

- $e^x = \sum_{k=0}^n x^k/k! + o(x^n)$ при всяком n;
- $\sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k+1}/(2k+1)! + o(x^{2n+2})$ при всяком n;
- $\cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k}/(2k)! + o(x^{2n+1})$ при всяком n;
- $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n x^k \cdot \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)/k! + o(x^n)$ при всяком n и произвольном $\alpha \in \mathbb{R}$ (формула бинома Ньютона);
- $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1}x^k/k + o(x^n)$ при всяком n;
- $\operatorname{arctg} x = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k+1}/(2k+1) + o(x^{2n+2})$ при всяком n.

Пример 2. Для функции $\operatorname{tg} x$ мы не будем выписывать формулу Тейлора произвольного порядка (хотя это можно сделать с помощью т.наз. чисел Бернулли). Формулы примера 1 позволяют быстро найти разложение любого заданного порядка. Например (все разложения при $x \to 0$): $\operatorname{tg} x = \sin x/\cos x = (x - x^3/6 + o(x^4))/(1 - x^2/2 + o(x^3))$ (по формуле Тейлора порядка 3 для функций sin и cos) $= (x - x^3/6 + o(x^4))(1 + x^2/2 + o(x^4))$ (по формуле бинома Ньютона с показателем $\alpha = -1$) $= x + x^3/2 - x^3/6 + o(x^4) = x + x^3/3 + o(x^4)$. Отсюда, например, следует, что $\lim_{x\to 0}(\operatorname{tg} x - x)/(\operatorname{arctg} x - x) = \lim_{x\to 0}(x^3/3 + o(x^4))/(-x^3/3 + o(x^4)) = -1$.

Пример 3. $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-1/x^2} = o(x^n)$ при всяком n, $x \to 0$. Это следует из того, что $e^t = o(1/t^n)$ при всяком n и $t \to -\infty$. Теорема 1 дает то же самое: доопределим функцию f нулем при $x = 0$. Очевидно, что при произвольном n и при $x \neq 0$ имеется равенство $f^{(n)}(x) = P_n(x)e^{-1/x^2}$, где P_n — некоторая дробно-рациональная функция. Докажем индукцией по n, что $f^{(n)}(0) = 0$. При $n = 0$ равенство верно; предположим его верным для некоторого n. Тогда $f^{n+1}(x) = \lim_{x\to 0} f^{(n)}(x)/x = \lim_{x\to 0} P_n(x)/x \cdot e^{-1/x^2} = 0$, поскольку $P_n(x)/x = O(x^{-k})$ при $x \to 0$ для некоторого натурального числа k, а $e^{-1/x^2} = o(x^k)$ при $x \to 0$ для всякого k.

Из равенства $(uv)' = u'v + uv'$ и формулы Ньютона–Лейбница вытекает следующая *формула интегрирования по частям*: $\int_a^b u(t)v'(t)\,dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt$ (предполагается, что функции u и v имеют на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные).

Теорема 2 (формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме). *Пусть функция* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *имеет* $n+1$ *непрерывную производную на отрезке* $[0,x] \subset \mathbb{R}$. *Тогда* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$.

Доказательство. $(n+1)$-кратное интегрирование по частям: $f(x) = f(0) - \int_0^x f'(t)\, d(x-t)$ [формула Ньютона–Лейбница] $= f(0) + f'(0)x + \int_0^x (x-t) f''(t)\, dt$ [интегрирование по частям, $u(t) = f'(t)$, $v(t) = x - t$] $= f(0) + f'(0)x - \frac{1}{2}\int_0^x ((x-t)^2)' f''(t)\, dt = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0) x^2 + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f'''(t)\, dt$ [интегрирование по частям, $u(t) = f''(t)$, $v(t) = (x-t)^2$] $= \cdots = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$. □

Теорема видоизменяется очевидным образом в случае $x < 0$.

Лемма 2. *Пусть функции* $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ *непрерывны и* $v(t) \geq 0$ *при всех* $t \in [a,b]$. *Тогда существует точка* $\xi \in [a,b]$ *такая, что* $\int_a^b u(t) v(t)\, dt = u(\xi) \int_a^b v(t)\, dt$.

Доказательство. Пусть $m = \inf_{[a,b]} u(x)$, $M = \sup_{[a,b]} u(x)$, тогда $m \int_a^b v(t)\, dt \leq \int_a^b u(t) v(t)\, dx \leq M \int_a^b v(t)\, dt$. Существование точки ξ следует теперь из теоремы о промежуточном значении для функции u. □

Следствие 1 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). *Пусть функция* f *дифференцируема* $n+1$ *раз на отрезке* $[0,x]$. *Тогда найдется* $\xi \in [0,x]$ *такое, что* $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) x^{n+1}$.

Доказательство. Применим к остаточному члену в теореме 2 формулу леммы 2 с $u(t) = f^{(n+1)}(t)$, $v(t) = (x-t)^n$. □

Пример 4. $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ для произвольного $x \in \mathbb{R}$. Действительно, в силу следствия 1 $e^x = \sum_{k=0}^{n} x^k/k! + R_n(x)$, где $R_n(x) = e^\xi x^{n+1}/(n+1)!$ для некоторого ξ, $0 \leq \xi \leq x$. Поэтому $|R_n(x)| \leq e^x x^{n+1}/(n+1)! \to 0$ при $n \to \infty$.

Пример 5. Для $f(x) = \ln(1+x)$ имеем $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!/(1+x)^n$. Формула Тейлора $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}/k + R_n(x)$, где $R_n(x) = \int_0^x (x-t)^n/(1+t)^n\, dt$. При $|x| > 1$ ряд Тейлора, очевидно, расходится. При $|x| < 1$ имеем $|(x-t)/(1+t)| < |x|$, откуда $|R_n(x)| \leq |x|^{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$.

При $x = -1$ ряд Тейлора — гармонический ряд, и поэтому расходится. При $x = 1$ имеем $R_n(1) = \int_0^1 ((1-t)/(1+t))^n\, dt$. Пусть $a_n = 1/\sqrt[n]{n}$. Тогда при $t > (1-a_n)/(1+a_n)$ имеем $((1-t)/(1+t))^n \leq 1/n$, так что $\int_{(1-a_n)/(1+a_n)}^1 ((1-t)/(1+t))^n\, dt \leq 1/n$. С другой стороны, $\int_0^{(1-a_n)/(1+a_n)} ((1-t)/(1+t))^n\, dt \leq (1-a_n)/(1+a_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда $R_n(1) \to 0$ при $n \to \infty$, то есть $\ln 2 = 1 - 1/2 + 1/3 + 1/4 - \ldots$.

Пример 6. Для функции f примера 3 ряд Тейлора нулевой — он сходится всюду, но его сумма нигде, кроме $x = 0$, не равна $f(x)$.

Лемма 3. *Пусть* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *и частная производная* $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ *непрерывна. Тогда сходимость* $\frac{1}{\delta}(f(x+\delta, y) - f(x,y)) \to \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}(x,y)$ *равномерна по* y *на любом компакте* $K \subset \mathbb{R}^n$.

Доказательство. По теореме Лагранжа о промежуточной точке для всякого y существует число $\theta(y)$, $0 < \theta(y) < 1$ такое, что $\frac{1}{\delta}(f(x+\delta, y) - f(x,y)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta(y)\delta, y)$. Функция $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ равномерно непрерывна на множестве $U \times K$, где U — малая окрестность точки x. Отсюда следует, что сходимость $\frac{\partial f}{\partial x}(x + \theta(y)\delta, y) \to \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ равномерная. □

Следствие. *Пусть* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. *Если частные производные* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *и* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *непрерывны, то они совпадают.*

Доказательство. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y+\delta) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = \lim_{\delta \to 0} \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma\delta}(f(x+\sigma, y+\delta) - f(x+\sigma, y) - f(x, y+\delta) + f(x,y))$. В силу равномерности сходимости (лемма 3) переходы к пределу можно переставить местами. □

Теорема 3 (многомерная формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *имеет непрерывные частные производные до* m*-го порядка включительно. Тогда справедлива формула* $f(x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{i_1 + \cdots + i_n = k} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k f}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}(0) x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} + o(|x|^n)$.

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

Доказательство. Теорема 1 для функции $g(t) = f(t, x_2, \ldots, x_n)$ дает $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i_1=0}^{n} \frac{1}{i_1!} \frac{\partial^{i_1} f}{\partial x_1^{i_1}}(0, x_2, \ldots, x_n) + o(|x|^n)$ (поскольку $|x_1| < |x|$, остаточный член $o(x_1^n) = o(|x|^n)$). Теперь применим теорему 1 к каждой из функций $g_s(t) = \frac{\partial^s f}{\partial x_1^s}(0, t, x_3, \ldots, x_n)$ — получим $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i_1, i_2 = 0}^{n} \frac{1}{i_1! i_2!} \frac{\partial^{i_1 + i_2} f}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2}}(0, 0, x_3 \ldots, x_n) + o(|x|^n)$, и т.д. □