ЛЕКЦИЯ 9

Краткое содержание. Полнота пространства $C(X)$. Принцип сжимающих отображений. Разрешимость обыкновенного дифференциального уравнения.

Лемма 1. *Компактное метрическое пространство полно.*

Доказательство. Вложим пространство X в его пополнение: $X \subset \overline{X}$. Поскольку X — компакт, а $\overline{X}$ — метрическое пространство и, следовательно, отделимо, X замкнуто как подмножество $\overline{X}$. По определению пополнения X плотно в $\overline{X}$ — следовательно, $X = \overline{X}$, откуда X полно. □

Пусть X — компактное метрическое пространство. Тогда метрическое пространство $C(X)$ определяется как множество непрерывных функций $X \to \mathbb{R}$ с расстоянием $\varrho(f,g) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{x\in X} |f(x) - g(x)|$.

Теорема 1. *Пространство $C(X)$ полно.*

Доказательство. Пусть отображение $f : Z \to C(X)$ фундаментально при $z \to z_0$: для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность U точки $z_0 \in Z$, что $\varrho(f(a), f(b)) < \varepsilon$ при $a, b \in U$ — то есть $|f(a)(x) - f(b)(x)| < \varepsilon$ для всех $a, b \in U$ и всех $x \in X$. В частности, это означает, что для всякого $x \in X$ отображение $f_x : Z \to \mathbb{R}$, заданное равенством $f_x(z) = f(z)(x)$, фундаментально при $z \to z_0$. Поскольку $\mathbb{R}$ полно, это отображение имеет предел $g(x) = \lim_{z\to z_0} f(z)(x)$.

Докажем, что в последнем равенстве сходимость равномерная. Пусть это не так: существует $d > 0$ такое, что для всякой окрестности $U \ni z_0$ найдется точка $z_U \in U$ и $x_U \in X$ такая, что $|f(z_U)(x_U) - g(x_U)| \ge d$. В силу фундаментальности отображения f можно взять U такой, что $|f(z_U)(x_U) - f(z)(x_U)| \le d/2$ при всех $z \in U$ — следовательно, $|f(z)(x_U) - g(x_U)| \ge d/2$. Это противоречит тому, что $g(x_U) = \lim_{z\to z_0} f(z)(x_U)$.

Поскольку сходимость равномерная, отображение $g : X \to \mathbb{R}$ непрерывно (по теореме 2 лекции 7), то есть $g \in C(X)$. Равномерная сходимость $f(z)(x) \to g(x)$ означает, что $\varrho(f(z), g) = \max_{x\in X} |f(z)(x) - g(x)| \to 0$ при $z \to z_0$. □

Пример 1. Покажем, что шар B радиуса 1 с центром $f(t) = 0$ в пространстве $C[0,1]$ некомпактен (и, тем самым, шар в полном метрическом пространстве не всегда компакт). Действительно, функции $f_n(t) = \sin 3^n \pi t$ принадлежат B и обладают тем свойством, что $\max_{t\in[0,1]} |f_n(t) - f_m(t)| = 2$ для всех m и n. Из этого очевидно вытекает, что множество $\{f_n\}$ не имеет в шаре ни одной предельной точки, так что предположение, что B — компакт, противоречило бы теореме 2 лекции 5. Тем самым в пространстве $C[0,1]$ нет аналога леммы Гейне–Бореля: ограниченное замкнутое множество может не быть компактом (нетрудно проверить, что обратное верно: компакт ограничен и замкнут).

Теорема 2 (принцип сжимающих отображений). *Пусть X — полное метрическое пространство, и $f : X \to X$ — отображение, для которого при некотором $q < 1$ и произвольных $a, b \in X$ выполнено неравенство $\varrho(f(a), f(b)) < q\varrho(a, b)$. Тогда отображение f имеет неподвижную точку, и притом только одну.*

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x_0 \in X$ и рассмотрим последовательность, заданную рекуррентным соотношением $x_{n+1} = f(x_n)$. Эта последовательность фундаментальна: $\varrho(x_m, x_n) < \varrho(x_m, x_{m+1}) + \dots + \varrho(x_{n-1}, x_n) < (q^m + \dots + q^{n-1})\varrho(x_0, f(x_0)) = \frac{q^m - q^n}{1-q}\varrho(x_0, f(x_0)) \to 0$ при $m, n \to \infty$. Поскольку пространство X полно, последовательность x_n имеет предел x_*. Отображение f, очевидно, непрерывно, поэтому в равенстве $x_{n+1} = f(x_n)$ можно перейти к пределу, получая $x_* = f(x_*)$ — существование неподвижной точки доказано. Единственность очевидна. □

Теорема 3. *Пусть задано отображение $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и вектор $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, причем при некоторых $R > 0$, $T_0 > 0$ отображение $F(t, x_1, \dots, x_n)$ непрерывно и имеет непрерывную производную по каждой переменной x_i при $t \in [0, T_0]$ и $|x - v| \le R$. Тогда для всякого достаточно малого $T > 0$ существует и единственно отображение $f : [0, T] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее дифференциальному уравнению $f'(t) = F(t, f(t))$ и начальному условию $f(0) = v$.*

Доказательство. Из формулы Ньютона–Лейбница вытекает, что всякое непрерывное отображение $f : [0, T] \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее интегральному уравнению $f(x) = v + \int_0^x F(t, f(t))\,dt$ удовлетворяет нужному дифференциальному уравнению и начальному условию. Обратное также верно. Поэтому достаточно доказать, что интегральное уравнение разрешимо (на достаточно малом отрезке $[0, T]$).

Отображение F непрерывно, поэтому существует M такое, что $|F(t,x)| \leq M$ при $t \in [0,T_0]$ и $|x-v| \leq R$. Пусть B — шар радиуса R с центром $v(t) \equiv v$ в метрическом пространстве $(C[0,T])^n$ для какого-либо $T \leq T_0$. Обозначим $A(f)(x) = v + \int_0^x F(t,f(t))\,dt$, тогда $|A(f)(x) - v| \leq MT$, если $f \in B$. Поэтому если $T < R/M$, то оператор A отображает шар B в себя.

Частные производные функции F по всем переменным x_i существуют и ограничены при $t \in [0,T] \subset [0,T_0]$, $|x-v| \leq R$ некоторой константой D: $|\frac{\partial f}{\partial x_i}(t,x)| \leq D$. Пусть $f = (f_1,\dots,f_n), g = (g_1,\dots,g_n) \in B$; рассмотрим отображение $s(t,\tau) \stackrel{\mathrm{def}}{=} F(t,(1-\tau)f(t) + \tau g(t)) - F(t,f(t))$, где $\tau \in [0,1]$. Производная $\frac{\partial s(t,\tau)}{\partial \tau}$ равна $\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(t,(1-\tau)f(t)+\tau g(t))(g_i(t)-f_i(t))$ и не превосходит по модулю $nD\sum_{i=1}^n |g_i(t)-f_i(t)|$. Отсюда следует, что $|F(t,g(t)) - F(t,f(t))| = \left|\int_0^1 \frac{\partial s(t,\tau)}{\partial \tau}\,d\tau\right| \leq nD\sum_{i=1}^n |g_i(t)-f_i(t)|$. Отсюда вытекает следующее неравенство для оператора $A : B \to B$: $\varrho(A(f),A(g)) \leq \max_{x\in[0,T]} \int_0^x |F(t,g(t)) - F(t,f(t))|\,dt \leq nDT \max_{i=1}^n \max_{x\in[0,T]} |f(x)-g(x)| = nDT\varrho(f,g)$. Поэтому при $T < 1/2nD$ оператор $A : B \to B$ является сжимающим (с константой $q = 1/2$).

Пространство $(C[0,1])^n$ полно по теореме 1. Шар $B \subset (C[0,1])^n$ замкнут, и поэтому также является полным метрическим пространством. Поэтому уравнение $f = A(f)$ имеет, согласно теореме 2, решение, и притом единственное. □

Следствие 1. *Пусть $F : \mathbb{R}^{nN+1} \to \mathbb{R}^n$ — отображение, а $v_0,\dots,v_{N-1} \in \mathbb{R}^n$ — набор векторов, причем F имеет непрерывные производные по всем переменным, кроме, возможно, первой, в некоторой окрестности точки $(0,v_0,\dots,v_{N-1}) \in \mathbb{R}^{nN+1}$. Тогда для некоторого числа $T > 0$ существует и единственна функция $f : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ такая, что $f^{(N)}(t) = F(t,f(t),f'(t),\dots,f^{(N-1)}(t))$ для всех $t \in [0,T]$, причем $f(0) = v_0$, …, $f^{(N-1)}(0) = v_{N-1}$.*

Доказательство. Введем вспомогательные функции $f_1,\dots,f_{N-1}$ и заметим, что система уравнений $f' = f_1, f_1' = f_2, \dots, f_{N-1}' = F(t,f,f_1,\dots,f_{N-1})$ с начальными условиями $f(0) = v_0$, …, $f_{N-1}(0) = v_{N-1}$ эквивалентна исходной задаче. □