ЗАДАЧИ–1

1. Шкала бесконечно малых

При решении задач из этого списка следует считать известными основные свойства действительных и комплексных чисел (свойства действий, правило знаков, факты, изложенные позднее в задачах).

Задача 1. Докажите неравенство $(1+x)^n \geq 1+nx$ при $n \in \mathbb{Z}$ и $x > -1$.

Указание. Индукция по n отдельно для $n > 0$ и $n < 0$.

Задача 2. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} \infty, & |a| > 1, \\ 0, & |a| < 1 \end{cases}$ (здесь $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$).

Указание. Рассмотрите сначала случай $a \in \mathbb{R}_+$.

Задача 3. Докажите, что а) $\lim_{n\to\infty}(n/a^n) = 0$ при $a > 1$ (здесь $n \in \mathbb{N}$); б) функция (x/a^x) монотонна при достаточно большом x (здесь $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$); в) $\lim_{x\to+\infty}(x/a^x) = 0$ при $a > 1$ (здесь $x \in \mathbb{R}$); г) $\lim_{x\to+\infty}(x^k/a^x) = 0$ при $a > 1$ (здесь $k \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$).

2. Элементарные функции

Для решения некоторых задач нужно использовать тот факт, что у ограниченного множества действительных чисел существует точная верхняя грань. Эквивалентное утверждение: ограниченная возрастающая последовательность сходится.

Задача 4. а) Докажите, что последовательность $a_n = (1+1/n)^n$ — возрастающая. б) Докажите, что последовательность $b_n = (1+1/n)^{n+1}$ — убывающая. в) Докажите, что обе последовательности ограничены и имеют один и тот же предел (обозначаемый буквой e).

Задача 5. Пусть $x > -1$, а $y > 1$ — а) рациональное число, б) действительное число. Докажите неравенство $(1+x)^y > 1+xy$.

Задача 6. а) Докажите, что последовательность $a_n = (1+M/n)^{n/M}$ возрастает при всяком положительном $M \in \mathbb{Z}$. б) Докажите, что функция $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, заданная формулой $f(x) = (1+1/x)^x$, возрастает.

Указание. Воспользуйтесь неравенством задачи 5.

Задача 7. а) Используя задачи 4 и 6 докажите, что $\lim_{x\to+\infty}(1+1/x)^x$ существует и равен числу e, определенному в задаче 4. б) Докажите равенство что $\lim_{x\to+\infty}(1+a/x)^x = e^a$ для всякого $a \in \mathbb{R}$.

Задача 8. а) Докажите неравенство $1+x \leq e^x \leq 1/(1-x)$ при всех достаточно малых действительных x. б) Выведите из этого неравенства равенство $\lim_{x\to 0}(e^x-1)/x = 1$.

Задача 9. Найдите а) $\lim_{n\to\infty}(1+1/n^2)^{(n+1)^2}$, б) $\lim_{n\to\infty} n^n/(n+1)^{n+1}$, в) $\lim_{n\to\infty} n^{n+1}/(n+1)^n$.

Задача 10. Докажите, что $\lim_{n\to\infty}(a^n/n!) = 0$ (здесь $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$).

Задача 11. Докажите, что $\lim_{n\to\infty}(n!/n^n) = 0$ (здесь $n \in \mathbb{N}$).