# ЗАДАЧИ–2 (ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА)

Пусть $X$ — топологическое пространство (например, $\overline{\mathbb{N}}$), а $M = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Отображение $f : X \to M$ называется фундаментальным в точке $a \in X$, если $\lim_{x,y\to a} |f(x) - f(y)| = 0$, где предел понимается как предел отображения $\varphi : X \times X \to \mathbb{R}$, заданного формулой $\varphi(x, y) = |f(x) - f(y)|$.

**Задача 1.** а) Расшифруйте это определение для случая $X = \overline{\mathbb{N}}$, $a = \infty$ и для случая $X = \mathbb{R}$. б) Докажите, что отображение $f : X \to M$, фундаментальное в точке $a$, ограничено в некоторой окрестности точки $a$ (иными словами, существует окрестность $U \subset X$ точки $a$ и шар $B(A, r) \subset M$ такие, что $f(U) \subset B(A, r)$). в) Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x)$ существует, то $f$ фундаментально в точке $a$.

Две последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ рациональных чисел назовем эквивалентными (обозначение $a_n \sim b_n$), если $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

**Задача 2.** а) Докажите, что описанное отношение действительно является отношением эквивалентности, то есть обладает свойствами

1) рефлексивности: $a_n \sim a_n$ для всякой последовательности $a_n$,
2) симметричности: если $a_n \sim b_n$, то $b_n \sim a_n$,
3) транзитивности: если $a_n \sim b_n$ и $b_n \sim c_n$, то $a_n \sim c_n$.

б) Докажите, что если последовательность $a_n$ фундаментальна (в точке $\infty$), то всякая эквивалентная ей последовательность тоже фундаментальна.

*Действительным числом* называется класс эквивалентности фундаментальных последовательностей рациональных чисел.

**Задача 3.** а) Пусть $a_n$ и $b_n$ — две фундаментальные последовательности рациональных чисел, причем существуют сколь угодно большие $p$ такие, что $a_p < b_p$ и одновременно — сколь угодно большие $q$ такие, что $a_q > b_q$. Докажите, что последовательности $a_n$ и $b_n$ эквивалентны. б) Дайте определение понятия "больше" для действительных чисел, и докажите, что в каждой паре различных действительных чисел ровно одно из них больше другого.

**Задача 4.** Докажите, что фундаментальная последовательность рациональных чисел представляет данное действительное число тогда и только тогда, когда она сходится к этому числу.

**Задача 5.** Пусть $a_n$ и $b_n$ — фундаментальные последовательности рациональных чисел, $a'_n \sim a_n$, $b'_n \sim b_n$. Докажите, что а) последовательности $-a_n$, $a_n + b_n$ и $a_n b_n$ фундаментальны, б) $-a'_n \sim -a_n$, $a'_n + b'_n \sim a_n + b_n$, $a'_n b'_n \sim a_n b_n$, в) если последовательность $a_n$ не сходится к нулю, то последовательность $1/a_n$ также фундаментальна, и $1/a'_n \sim 1/a_n$. г) Дайте определение действий над действительными числами и докажите, что действия над действительными числами удовлетворяют аксиомам поля: сложение и умножение не зависят от расстановки скобок (ассоциативны) и от порядка слагаемых (коммутативны), имеет место тождество дистрибутивности $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$, существуют нуль и единица, удовлетворяющие тождествам $\alpha + 0 = \alpha = \alpha \cdot 1$, всякое число имеет противоположное и всякое число, кроме нуля, имеет обратное. д) Докажите, что сумма и произведение двух положительных чисел положительны.

Интервалом $(\alpha, \beta)$ называется множество $\{x \in \mathbb{R} \mid \alpha < x < \beta\}$.

**Задача 6.** а) Докажите, что для всякого $\alpha \in \mathbb{R}$ существует единственное целое число $n$ такое, что $n \leq \alpha < n + 1$. б) Докажите, что всякое действительное число однозначно представимо в виде бесконечной десятичной дроби, т.е. в виде $n + \sum_{k=1}^{\infty} a_k/10^k$, где $n \in \mathbb{Z}$, $a_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ и последовательность $\{a_k\}$ не содержит бесконечного "хвоста" из девяток ($\forall N \exists k > N\ a_k \neq 9$).

**Задача 7.** а) Докажите теорему Коши: если последовательность $a_n \in \mathbb{R}$ фундаментальна (в точке $\infty$), то предел $\lim_{n\to\infty} a_n$ существует. б) Докажите обобщение теоремы Коши: пусть топологическое пространство $X$ имеет счетную базу окрестностей, т.е. базу окрестностей, элементы которой находятся во взаимно однозначном соответствии с множеством натуральных чисел: $U_1, U_2, \ldots$. Тогда всякое отображение $f : X \to \mathbb{R}$, фундаментальное в точке $a \in X$, имеет в этой точке предел $\lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R}$.

**Задача 8.** Докажите, что возрастающая последовательность действительных чисел, ограниченная сверху, имеет предел.

**Задача 9.** Докажите принцип вложенных отрезков: пусть $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots$ — последовательность вложенных отрезков действительной прямой. Тогда пересечение $\bigcap_n [a_n, b_n]$ непусто.

Пусть $X \subset \mathbb{R}$. Число $M \in \mathbb{R}$ называется точной верхней гранью множества $X$ (запись $M = \sup X$), если оно ограничивает $X$ сверху, но никакое меньшее число этим свойством уже не обладает: $\forall x \in X\ x \leq M$ и $\forall m < M \exists x \in X\ x > m$.

**Задача 10.** Докажите, что всякое ограниченное сверху множество действительных чисел имеет точную верхнюю грань.

**Задача 11.** Докажите, что множество $\mathbb{R}$ несчетно, то есть не существует взаимно однозначного отображения $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Несчетно также и множество точек любого отрезка.

**Задача 12.** Докажите, что а) множество целых чисел счетно, б) декартово произведение двух счетных множеств счетно, в) бесконечное подмножество счетного множества счетно, г) множество рациональных чисел счетно.

**Задача 13.** Докажите, что всякий отрезок действительной оси (отличный от точки) содержит как рациональные, так и иррациональные числа.

**Задача 14.** Докажите, что множество интервалов с рациональными концами образует счетную базу топологии в $\mathbb{R}$.