ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Степенная, показательная и логарифмическая

Задача 1. Докажите, что а) для монотонной функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ и всякого $a\in\mathbb{R}$ пределы $\lim_{x\to a-0} f(x)$ и $\lim_{x\to a+0} f(x)$ всегда существуют, б) монотонная функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывна тогда и только тогда, когда для всякого $y\in(m,M)$, где $m=\inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$, $M=\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$, существует $x\in\mathbb{R}$ такое, что $f(x)=y$, в) функция, обратная к непрерывной монотонной, непрерывна, г) множество точек разрыва монотонной функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ конечно или счетно.

Задача 2. Докажите, что для всякого $x>0$ и всякого $n\in\mathbb{N}$ существует и единственно $y>0$ такое, что $y^n=x$.

Обозначение: $y=x^{1/n}=\sqrt[n]{x}$. Для рационального числа $r=p/q$ положим $x^r \stackrel{\mathrm{def}}{=} (x^p)^{1/q}$.

Задача 3. Проверьте корректность последнего определения и проверьте для него основные свойства степени.

Задача 4. Докажите, что а) $x^{1/n}\to 1$ при $n\to\infty$, б) $x^{r_n}\to 1$ при $n\to\infty$, если r_n — последовательность рациональных чисел, стремящаяся к нулю.

Для $\alpha\in\mathbb{R}$ положим $x^\alpha \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lim_{n\to\infty} x^{r_n}$, где r_n — возрастающая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к α.

Задача 5. а) Проверьте корректность этого определения, т.е. независимость x^α от выбора последовательности r_n. б) Докажите, что если $\lim_{n\to\infty} s_n=\alpha$, где s_n — произвольная последовательность действительных чисел, то $\lim_{n\to\infty} x^{s_n}=x^\alpha$.

Задача 6. Выведите из задач 1б и 5б, что для всякого $a>0$, $a\neq 1$, и всякого $x>0$ существует и единственно $y>0$ такое, что $a^y=x$. Обозначение: $y=\log_a x$.

Задача 7. а) Докажите, что функция $f(x)=x^\alpha$ непрерывна при $x>0$ и при всяком $\alpha\in\mathbb{Q}$, б) и при всяком $\alpha\in\mathbb{R}$. в) Докажите, что функция $f(y)=a^y$ непрерывна (при всяком $a>0$). г) Докажите, что функция $f(x)=\log_a x$ непрерывна (при всяком $a>0$).

Задача 8. Докажите равенства а) $\lim_{x\to 0}\ln(1+x)/x=1$, б) $\lim_{x\to 0}(a^x-1)/x=\ln a$, в) $\lim_{x\to 0}((1+x)^\alpha-1)/x=\alpha$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 7 и равенством $\lim_{x\to 0}(e^x-1)/x=1$ (задача 8б листка “Задачи–1”).

2. Тригонометрические

В задачах этого раздела предполагается известным, что если функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx$ существует.

Задача 9. Докажите, что функция $f(z)=\int_0^z \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ возрастает и непрерывна при $z\in[-1,1]$. (При $z<0$ по определению $\int_0^z \stackrel{\mathrm{def}}{=} -\int_z^0$.)

Согласно задаче 1б, функция f имеет обратную, которая обозначается $\sin x$: $\int_0^{\sin x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=x$. По определению положим $\cos x \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sqrt{1-\sin^2 x}$, $\operatorname{tg} x=\sin x/\cos x$.

Задача 10. Покажите, что это определение синуса совпадает с принятым в средней школе.

Указание. Рассмотрите сектор с углом x и радиусом 1. Длина дуги такого сектора равна x, а длина перпендикуляра, опущенного на сторону сектора из противоположного конца дуги, равна $\sin x$.

Задача 11. Докажите неравенство $|\sin x|\le|x|\le|\operatorname{tg} x|$.

Задача 12. а) Докажите, что $\lim_{x\to 0}\sin x/x=1$. б) Вычислите $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)/x^2$.