СХОДИМОСТЬ И АСИМПТОТИКИ

Задача 1. Пусть а) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{2+\sqrt{a_n}}$; б) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Покажите, что последовательность $\{a_n\}$ сходится, и найдите ее предел.

Пусть f и g — две функции. Обозначения:

- $f = o(g)$ при $x \to a$, если $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = 0$,
- $f = O(g)$ при $x \to a$, если существует такое число C, что $|f(x)| \le C\,|g(x)|$ в некоторой окрестности точки a,
- $f \sim g$ при $x \to a$, если $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = 1$; в этом случае говорят, что g — асимптотика для f.
- $f \simeq g$ при $x \to a$, если $f = O(g)$ и $g = O(f)$; в этом случае тоже иногда говорят, что g — асимптотика для f.

"Найти асимптотику для f" значит найти g такую, что $f \sim g$ (или хотя бы $f \simeq g$), причем g "устроена проще", чем f. Обычно в качестве g берут степенные, показательные и логарифмические функции. Если $f(x) \simeq x^\alpha$ при $x \to 0$, то говорят, что $f(x)$ имеет при $x \to 0$ порядок малости α.

Задача 2. Найдите асимптотику (с точностью до $\sim$) функции а) $(1+x)^a - 1$ при $x \to 0$; б) $1 - \cos x$ при $x \to 0$; в) $\sin(\pi \cdot 6^{-x}) - 1/2$ при $x \to 1$.

Указание. В задаче 2в воспользуйтесь теоремами сложения для тригонометрических функций.

Задача 3. Пусть $S(x)$ — площадь сегмента, стягивающего дугу x радиан в окружности радиуса 1. Найдите а) порядок малости б) асимптотику с точностью до $\sim$ функции $S(x)$ при $x \to 0$.

Задача 4. Найдите а) порядок малости б) асимптотику с точностью до $\sim$ функции $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}\,dt$ при $x \to 0$.

Задача 5. Найдите асимптотику последовательности a_n при $n \to \infty$ с точностью до $\simeq$ и, если получится, с точностью до $\sim$: а) $a_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$, где $\alpha > 0$; б) $a_n = \sqrt[3]{n^2 - n + 2001}$; в) a_n — количество чисел Фибоначчи, не превосходящих n; г) a_n — корень уравнения $\operatorname{ctg} x = x$, лежащий в промежутке $(n\pi, (n+1)\pi)$; д) a_n — (единственный) действительный корень уравнения $x^5 + nx - 1 = 0$; е) a_n задана рекуррентной формулой: $a_1 = 1/2$, $a_{n+1} = a_n - a_n^2$; ж) a_n задана рекуррентной формулой: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sin a_n$.

Указание. Последовательность чисел Фибоначчи определяется правилами $u_1 = u_2 = 1$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ при $n > 2$; как известно, $u_n = \frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right)$.

Задача 6. а) Докажите, что $\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{n/2}\,dt = 0$. б) Пусть v_n — объем n-мерного шара радиуса n. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$. в) Докажите, что $v_n = o(1/n^k)$ при всяком $k \in \mathbb{N}$.

Если уже доказано, что "простая" функция g является асимптотикой для функции f, можно поискать "второй член асимптотического разложения функции f", то есть асимптотику разности $f(x) - g(x)$.

Задача 7. Найдите второй член асимптотического разложения для последовательностей и функций из задач 2а, 4, 5а, 5б, 5г.