МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Задача 1. Приведите примеры метрических пространств, в которых а) шар большего радиуса вложен в шар меньшего радиуса, б) шар имеет несколько центров, в) шар содержит больше одной точки, причем каждая его точка — центр.

Задача 2. Докажите, что последовательность вложенных шаров в полном метрическом пространстве, последовательность радиусов которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение.

Задача 3. Верно ли утверждение задачи 2, если последовательность радиусов не стремится к нулю ?

Задача 4. Докажите, что пространство многочленов с действительными коэффициентами неполно в следующих метриках: а) $\varrho(P,Q) = \max_{t\in[0,1]} |P(t) - Q(t)|$, б) $\varrho(P,Q) = \int_0^1 |P(t) - Q(t)|\, dt$.

Задача 5. Опишите пополнения следующих метрических пространств: а) прямой $\mathbb{R}$ с расстоянием $\varrho(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$, б) прямой $\mathbb{R}$ с расстоянием $\varrho(x,y) = |e^x - e^y|$, в) множества Δ отрезков (ненулевой длины) на прямой, причем расстояние между двумя отрезками равно длине их симметрической разности.

Задача 6. Докажите, что равномерно непрерывное отображение метрических пространств $f : X \to Y$, где Y полно, однозначно продолжается до непрерывного отображения $f : \overline{X} \to Y$ (где $\overline{X}$ — пополнение X), и это продолжение равномерно непрерывно.

Задача 7. а) Найдите стандартное 2-адическое представление чисел -1. б) То же, числа $1/3$. в) Докажите, что $\mathbb{Q}_p$ — поле.

Задача 8. Каким точкам канторова множества соответствуют точки 2-адической сферы $\{x \in \mathbb{Q}_p \mid |x|_2 = 1\}$?

Задача 9. а) Существует ли в поле $\mathbb{Q}_5$ элемент $\sqrt{-1}$? б) а в поле $\mathbb{Q}_2$? в) Пусть $q \in \mathbb{Z}$ не делится на простое число $p > 2$. Докажите, что $\sqrt{q}$ существует в поле $\mathbb{Q}_p$ тогда и только тогда, когда q — квадратичный вычет по модулю p, т.е. найдется такое $x \in \mathbb{Z}$, что $x^2 - q$ делится на p. г) Для каких $q \in \mathbb{Z}$ в поле $\mathbb{Q}_2$ существует $\sqrt{q}$?