АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ. РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ.

Говорят, что последовательность a_n сходится к a в среднем арифметическом, если $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k = a$.

Задача 1. а) Пусть $a_n \to a \in \overline{\mathbb{R}}$ при $n\to\infty$. Докажите, что a_n сходится к a в среднем арифметическом. б) Найдите предел в среднем арифметическом последовательности $a_n = z^n$ $(z\in\mathbb{C})$. в) То же, $a_n = \sin nx$, $x\in\mathbb{R}$. г) То же, $a_n = \sum_{k=0}^n z^k$ ("сходимость ряда $\sum_{k=0}^\infty z^k$ в среднем арифметическом").

Говорят, что ряд $\sum_{n=0}^\infty a_n$ абсолютно сходится, если ряд $\sum_{n=0}^\infty |a_n|$ сходится.

Задача 2. а) Пусть ряд $\sum_{n=0}^\infty a_n$ абсолютно сходится и $s:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ — взаимно однозначное отображение. Докажите, что $\sum_{n=0}^\infty a_{s(n)} = \sum_{n=0}^\infty a_n$. б) Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n/n$ сходится (не абсолютно), но аналогичное утверждение для него неверно.

В следующих задачах $a_n, x, z \in \mathbb{C}$.

Задача 3. а) Ряд $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ сходится и $R < |z|$. Докажите, что ряд $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ сходится абсолютно и равномерно в круге $\{x\in\mathbb{C} \mid |x|\le R\}$. б) Ряд $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ расходится и $|x| > |z|$. Докажите, что $\lim_{n\to\infty} a_n x^n = \infty$. в) Докажите, что для всякой последовательности a_n найдется такое число $\varrho\in\mathbb{R}_{\ge 0}\cup\{+\infty\}$, что при всяком $R<\varrho$ ряд $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ сходится абсолютно и равномерно в круге $\{x\in\mathbb{C} \mid |x|\le R\}$, и $\lim_{n\to\infty} a_n x^n = \infty$ при $|x|>\varrho$ (ϱ называется радиусом сходимости).

Задача 4. а) Найдите радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^\infty x^n n^k$, $k\in\mathbb{Z}$. б) То же, ряда $\sum_{n=1}^\infty x^n/n!$. в) Пусть $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = K$. Докажите, что радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ равен $1/K$ (∞, если $K=0$). г) Пусть $\lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n| = K$. Докажите, что радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ равен $1/K$.

Задача 5. а) Пусть $a_n\to 0$, а последовательность $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$ ограничена. Докажите, что ряд $\sum_{n=0}^\infty a_n b_n$ сходится. б) При каких $z\in\mathbb{C}$ сходится ряд $\sum_{n=1}^\infty z^n/n$? в) Тот же вопрос про ряд $\sum_{n=1}^\infty z^n/n^\alpha$ при произвольном $\alpha>0$. г) Пусть $\lambda_n\to 0$ монотонно. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^\infty \lambda_n \sin nx$ сходится равномерно на любом отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$, не содержащем точек вида $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Указание (к вопросу 5а). Докажите, что последовательность $c_N = \sum_{n=0}^N a_n b_n$ фундаментальна.

Указание (к вопросу 5г и последующим задачам). $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, откуда $\cos x = (e^{ix}+e^{-ix})/2$, $\sin x = (e^{ix} i e^{-ix})/(2i)$.

Задача 6. а) Докажите равенство $\int_0^\pi \sin mx \sin nx = 0$ при $m\ne n$; вычислите интеграл при $m=n$ $(m,n\in\mathbb{Z})$. б) Пусть $\lambda_n\to 0$ монотонно, $g(x) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \sin nx$. Докажите, что $\lambda_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(x)\sin mx\,dx$.

Указание. Воспользуйтесь задачей 5г.

По определению $\int_a^\infty = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b$.

Задача 7. а) Докажите, что интеграл $I(a) = \int_0^\infty \sin x/x\cdot e^{-ax}\,dx$ сходится равномерно по $a\in(0,\infty)$. б) Докажите, что интеграл $I(0) = \int_0^\infty \sin x/x\cdot dx$ сходится. в) Докажите, что интеграл $I(a)$ сходится равномерно по $a\in[0,\infty)$. г) Вычислите $I'(a)$. д) Вычислите $I(a)$ при всех $a\in[0,\infty)$.

Указание. Задача 7б решается примерно так же, как 5а.

Задача 8 (теорема Дини). а) Пусть последовательность непрерывных функций $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ монотоннj убывает при каждом $x\in[0,1]$ и сходится к непрерывной функции f. Докажите, что сходимость равномерная. б) Можно ли в этом утверждении отказаться от условия монотонности ? в) А от условия непрерывности f_n ? г) А от условия непрерывности f ? д) А заменить отрезок $[0,1]$ на множество $\mathbb{R}$?

Задача 9 (дзета-функция Римана). а) Докажите, что при $s>1$ ряд $\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty 1/n^s$ сходится. б) Докажите, что $\zeta(s)$ — непрерывная функция s при $s>1$. в) Докажите, что $\zeta(s)\to\infty$ при $s\to 1+0$.

Задача 10. а) Докажите, что ряд $\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^\infty (1/(x-n) + 1/(x+n))$ сходится при любом $x\notin\mathbb{Z}$. б) Пусть $f(x)$ — сумма этого ряда. Докажите, что $f(x+1) = f(x)$. в) Докажите, что $f(x)$ непрерывна. г) Найдите асимптотику $f(x)$ при $x\to N\in\mathbb{Z}$.