ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.

Задача 1. Пусть $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции, причем $g > 0$. Пусть $v \in \mathbb{R}$ и $G(\tau) = \int_v^\tau dt/g(t)$. Тогда функция $y(x) = G^{-1}(\int_0^x f(t)\,dt)$ является решением дифференциального уравнения $y' = f(x)g(y)$ с начальным условием $y(0) = v$.

Замечание. Мнемоническое правило: $dz/ds = f(s)g(z) \Leftrightarrow dz/g(z) = f(s)ds \Leftrightarrow \int_v^y dz/g(z) = \int_0^x f(s)ds$.

Задача 2. Найдите а) решение дифференциального уравнения $y' = \alpha y + \beta$ с начальным условием $y(0) = v$ ($\alpha, \beta = const.$), б) решение уравнения движения математического маятника $y'' = -y$ с начальными условиями $y(0) = a$, $y'(0) = b$, в) все решения $f(x,t)$ дифференциального уравнения колебаний струны $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, закрепленной на концах: $f(1,t) = f(-1,t) \equiv 0$.

Указание. В задаче 2б рассмотрите функцию $\varphi(s)$ такую, что $y'(t) = \varphi(y(t))$ и составьте для функции φ дифференциальное уравнение первого порядка. В задаче 2в замените переменные: $y = x + t$, $z = x - t$.

Задача 3. Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор. Докажите, что существует положительная константа M такая, что $|Av| \le M\,|v|$ для всех $v \in \mathbb{R}^n$.

Задача 4. а) Докажите, что для каждого линейного оператора $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ряд $\exp(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^\infty A^k/k!$ сходится. б) Что можно утверждать относительно равномерной сходимости ?

Задача 5. а) Докажите равенство $\exp(BCB^{-1}) = B\exp(C)B^{-1}$. б) Вычислите $\exp\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. в) Вычислите $\exp\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. г) Приведите пример двух операторов A и B таких, что $\exp(A+B) \ne \exp(A)\exp(B)$.

Задача 6. Пусть $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейный оператор. Докажите, что вектор-функция $y(t) = \exp(At)v$ является решением дифференциального уравнения $y' = Ay$ с начальным условием $y(0) = v$.

Задача 7. Найдите все решения дифференциального уравнения $y'' = 2y' - y$.