ЭКЗАМЕН 1 – 8 МАРТА 2006 Г.

Пожалуйста, соблюдайте следующие правила оформления работы:

1) *Работа должна иметь титульный лист, на котором написана фамилия и имя сдающего экзамен* ***И БОЛЕЕ НИЧЕГО НЕ НАПИСАНО***
2) *Решение каждой задачи или пункта, в котором требуется ответ, должно начинаться со слова "Ответ", за которым следует ответ. Это правило нужно соблюдать, даже если в тексте решения ответ и так встречается. Решение каждого пункта задачи 1 должно начинаться с формулировки утверждения.*

Работу нужно сдать в учебную часть до 20.00 6 марта 2006 г.

Задача 1. Сформулируйте утверждение точно и докажите его: а) Сходящийся степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы. б) Композиция двух аналитических функций одной переменной — аналитическая функция (функция называется аналитической в точке a, если она представляется в некоторой окрестности точки a как сумма сходящегося ряда по степеням $(x-a)$).

Задача 2. Докажите равенство $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{4((2n)!!}{\pi(2n-1)!!} \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n} x\, dx$.

Задача 3. Найдите $\lim_{x\to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(1+x^n)}$.

Задача 4. а) Подмножества $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$ отрезка $[0,1]$ открыты и всюду плотны (т.е. замыкание каждого из них совпадает со всем отрезком $[0,1]$). Докажите, что они имеют общую точку. б) Приведите пример последовательности $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$ всюду плотных подмножеств отрезка $[0,1]$, общей точки не имеющих.

Задача 5. При каких $x \in \mathbb{R}$ верно равенство $||e^A|| = e^{||A||}$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & x \end{pmatrix}$? Здесь норма оператора определяется равенством $||B|| \stackrel{\text{def}}{=} \max_{||y||=1} ||By||$, а норма вектора — евклидова: $||(y_1,y_2)|| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{y_1^2+y_2^2}$.

Задача 6. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет соотношению $f''(x) = -f^2(x)x^2$. Докажите, что уравнение $f(x) = 0$ имеет бесконечно много решений.