Дополнительные главы геометрии
Лекция 1
НМУ, осень 2005

А. В. Пенской

Аннотация

Лекция 1 содержит краткое повторение основных определений и результатов, касающихся векторных расслоений, которые были изложены в курсе дифференциальной геометрии весной 2005 года.

1 Расслоения

Существуют определения разных видов расслоений, но, по крайней мере, все сходятся в том, что расслоение — это тройка $\xi = (E, p, B)$, состоящая из пространства E, называемого тотальным пространством расслоения ξ, пространства B, называемого базой расслоения ξ, и отображения $p : E \longrightarrow B$, называемого проекцией. В зависимости от контекста, пространства E и B могут быть топологическими пространствами, гладкими многообразиями, ..., а p непрерывным отображением, гладким отображением, ... В зависимости от этого мы будем говорить о топологических расслоениях, гладких расслоениях и т. д. Нам в основном будет интересен случай гладких расслоений, но зачастую полезно рассматривать топологические расслоения над гладкой базой, в этом случае мы рассматриваем базу как топологическое пространство.

Иногда мы будем называть расслоением само тотальное пространство расслоения E, если при этом ясно какую базу и проекцию мы подразумеваем.

Прообраз точки базы $p^{-1}(x)$ называется слоем над точкой $x \in B$, и часто обозначается E_x. Полезно представлять себе, что слой E_x «висит над x»:

$$\begin{array}{c} E_x \\ \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ x \end{array}$$

Простейшим примером расслоения является *тривиальное расслоение* $E = B \times F \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} B$, где pr_1 обозначает проекцию на первый сомножитель прямого произведения, а F называется слоем.

База, тотальное пространство и проекция обычно удовлетворяют каким-либо дополнительным аксиомам. Нас будет интересовать только случай локально тривиальных расслоений.

Определение 1.1 *Гладкое расслоение $\xi = (E, p, B)$ называется* локально тривиальным расслоением со слоем F, *если существуют многообразие F, открытое покрытие множествами U_α базы B и диффеоморфизмы*

$$\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F,$$

такие что диаграмма

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "p"] & U_\alpha \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\ U_\alpha & \end{tikzcd}$$

коммутативна. Множества U_α называются тривиализующими окрестностями, а образованное ими покрытие называется тривиализующим покрытием. Все это вместе называется тривиализацией расслоения ξ.

Из определения видно, что для локально тривиального расслоения слои над любыми точками базы диффеоморфны слою расслоения F:

$$E_x \cong F, \quad x \in B.$$

Ясно, что в топологическом контексте надо требовать, чтобы слой F был топологическим пространством, а φ_α были гомеморфизмами. В тех случаях, когда изменения для топологического случая очевидны, мы будем впреть о них умалчивать, чтобы не загромождать текст.

Как мы видим, локально тривиальное расслоение «склеено» из тривиальных расслоений.

Отныне все расслоения будут у нас предполагаться локально тривиальными.

Рассмотрим попарные пересечения тривиализующих окрестностей $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$. У нас имеется диффеоморфизм

$$\varphi_{\alpha_\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : U_{\alpha\beta} \times F \longrightarrow U_{\alpha\beta}.$$

Из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} U_{\alpha\beta} \times F \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & p^{-1}(U_{\alpha\beta}) \arrow[l, "\varphi_\alpha"'] \arrow[r, "\varphi_\beta"] \arrow[d, "p"] & U_{\alpha\beta} \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[ll, bend right, "\varphi_{\alpha\beta}"'] \\ & U_{\alpha\beta} & \end{tikzcd}$$

следует, что $\varphi_{\alpha\beta}$ переводит элемент из $U_{\alpha\beta}$ в самого себя, поэтому имеется некоторое отображение $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \longrightarrow \operatorname{Aut} F$, такое что

$$\varphi_{\alpha,\beta}(x, y) = (x, g_{\alpha\beta}(x)y),$$

где $x \in U_{\alpha\beta}$, $y \in F$, а $\operatorname{Aut} F$, вообще говоря, группа диффеоморфизмов слоя F. Но это очень большая группа, с которой трудно работать. Поэтому представляет интерес такой частный случай, когда существует некоторая меньшая группа $G \subset \operatorname{Aut} F$, такая что для любых α, β и x верно

$g_{\alpha\beta}(x) \in G \subset \operatorname{Aut} F$. В такой ситуации группа G называется структурной группой расслоения $\xi = (E, p, B)$. Структурная группа обычно какая-либо конечномерная группа Ли. Расслоение со структурной группой G называется также G-расслоением.

Отображения $g_{\alpha\beta}$ обладают следующими очевидными свойствами:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\alpha} &= 1, \\ g_{\alpha\beta}^{-1} &= g_{\beta\alpha}, \\ g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} \circ g_{\gamma\alpha} &= 1, \end{aligned}$$

где под 1 и g^{-1} подразумеваются единица и взятие обратного элемента в структурной группе. На самом деле, эти свойства являются условиями коцикла (со значениями в G), поэтому $g_{\alpha\beta}$ называют склеивающими коциклами расслоения.

Важнейшим случаем является случай векторных расслоений.

Определение 1.2 *Локально-тривиальное расслоение, слоем которого является векторное пространсто V, а структурная группа равна группе $\mathrm{GL}(V)$ или ее подгруппе, называется векторным расслоением.*

Размерность слоя V называется рангом векторного расслоения ξ и обозначается $\operatorname{rk}\xi$. Иногда ранг называют размерностью расслоения, но когда расслоение обозначают просто как E, то может быть путаница с размерностью тотального пространства E, поэтому такой терминологии лучше избегать.

Если слой является векторным пространством над $\mathbb{R}$, то мы говорим о вещественном векторном расслоении, если над $\mathbb{C}$, то о комплексном. Заметим, что поле не связано с вещественностью или комплексностью базы: например, нам понадобится в дальнейшем рассматривать комплексные векторные расслоения над вещественными гладкими многообразиями.

Важнейшим примером является *касательное расслоение к гладкому многообразию* $TM \xrightarrow{p} M$, где p — естественная проекция. Слоем над точкой $x \in M$ является касательное пространство T_xM в этой точке.

Относительно нетрудно доказать, что локально тривиальное расслоение может быть восстановлено, исходя из тривиализующих окрестностей, слоя и склеивающих коциклов, точно также как многообразие может быть восстановлено из карт и склеивающих отображений, Поэтому мы можем говорить о локально тривиальных расслоениях в этих терминах. В частноти, гладкие расслоения — это расслоения с гладкими склеивающими коциклами (гладкими как отображения $U_\alpha \longrightarrow G$), топологические — с непрерывными склеивающими коциклами и т. д. Например, если база является комплексным аналитическим многообразием, то можно рассматривать голоморфные (аналитические) расслоения, у которых склеивающие коциклы голоморфны.

Ясно, что одно и то же расслоение может быть задано с помощью разных тривиализующих покрытий и склеивающих коциклов. Как эти разные тривиализации связаны друг с другом?

Если у нас есть тривиализующее покрытие множествами U_α, то всегда можно разбить каждое из этих множеств на куски $\tilde{U}_\beta$, взять в качестве диффеоморфизмов $\tilde{\varphi}_\beta$ ограничения φ_α, и мы снова получим тривиализующее покрытие, которое мы будем называть измельчением исходного покрытия.

Пусть у нас теперь есть две разных тривиализации U_α и V_β. Покрытие множествами $U_\alpha \cap V_\beta$ будет измельчением обоих покрытий. Так что при сравнении двух различных тривиализаций нам достаточно рассмотреть случай, когда они имеют одно и то же тривиализующее покрытие.

Пусть у нас есть тривиализующее покрытие U_α и два семейства диффеоморфизмов

$$\varphi_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times F.$$

Тогда у нас есть диффеоморфизмы

$$\tilde{\varphi}_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times F \longrightarrow U_\alpha \times F.$$

Из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
U_\alpha \times F \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & p^{-1}(U_\alpha) \arrow[l, "\tilde{\varphi}_\alpha"'] \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "p"] & U_\alpha \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[ll, bend right, "\tilde{\varphi}_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}"'] \\
& U_\alpha &
\end{tikzcd}$$

следует, что $\tilde{\varphi}_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}$ переводит элемент из U_α в самого себя, поэтому имеется некоторое отображение $h_\alpha : U_\alpha \longrightarrow G$, такое что

$$\tilde{\varphi}_\alpha \circ \varphi_\alpha^{-1}(x, y) = (x, h_\alpha(x) y).$$

Из тождества $\tilde{\varphi}_\alpha \tilde{\varphi}_\beta{}^{-1} = \tilde{\varphi}_\alpha \varphi_\alpha^{-1} \varphi_\alpha \varphi_\beta^{-1} \varphi_\beta \tilde{\varphi}_\beta^{-1}$ и определения h_α и $g_{\alpha\beta}$ немедленно следует, что

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}(x) y = h_\alpha(x) g_{\alpha\beta}(x) h_\beta^{-1}(x) y,$$

То есть мы видим, что две разных тривиализации связаны соотношением

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} = h_\alpha \circ g_{\alpha\beta} \circ h_\beta^{-1}.$$

Это условие на самом деле значит, что коциклы $g_{\alpha\beta}$ и $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ когомологичны. Из этого можно вывести, что (очень грубо говоря) множество расслоений над базой B совпадает с группой $H^1(B, G)$ когомологий со значениями в пучке G-значных функций см. подробности, например, в книге Каруби[1]. Для нас это не настолько важно и мы не будем углубляться в этот сюжет.

2 Отображения расслоений

Определение 2.1 *Если $\xi_1 = (E^1, p_1, B)$ и $\xi_2 = (E^2, p_2, B)$ два расслоения над одной базой, то* отображением (морфизмом) *расслоения ξ_1 в расслоение ξ_2 называется такое гладкое отображение $f : E^1 \longrightarrow E^2$, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
E^1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E^2 \arrow[dl, "p_2"] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть слой E^1_x отображается в слой E^2_x. Для векторных расслоений мы дополнительно требуем, чтобы это отображение слоев $f_x : E^1_x \longrightarrow E^2_x$ было линейным отображением.

Определение 2.2 *Если $\xi_1 = (E^1, p_1, B_1)$ и $\xi_2 = (E^2, p_2, B_2)$ расслоения с разными базами, то* отображением (морфизмом) *расслоения ξ_1 в расслоение ξ_2 называется такая пара гладких отображений $f : E^1 \longrightarrow E^2$ и $g : B_1 \longrightarrow B_2$, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} E^1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_1"'] & E^2 \arrow[d, "p_2"] \\ B_1 \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть слой E^1_x отображается в слой $E^2_{g(x)}$. Для векторных расслоений мы дополнительно требуем, чтобы это отображение слоев $f_x : E^1_x \longrightarrow E^2_{g(x)}$ было линейным отображением.

Эти определения очевидным образом модифицируются для топологических, голоморфных и т. д. расслоений.

Также ясно, что изоморфизм расслоений — это такой морфизм, что у него есть обратный.

3 Сечения расслоений

Определение 3.1 *Сечением расслоения $\xi = (E, p, B)$ называется отображение $s : B \longrightarrow E$, такое что $p \circ s = \mathrm{id}$.*

Мы говорим о гладком сечении, если это отображение гладкое, о непрерывном, если оно непрерывно и т. д.

Это определение значит, что образ $s(x)$ лежит в слое E_x над точкой x. В случае векторного расслоения это удобно представлять как то, что сечение — это выбор вектора над каждой точкой базы. Полезно представлять сечение как «отображение наверх», «поднятие»:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[u, bend left, "s"] \end{tikzcd}$$

То есть над каждой точкой x базы векторного расслоения «висит» вектор $s(x)$.

Например, сечение касательного расслоения TM это векторное поле на многообразии M.

Пространство сечений обозначается $\Gamma(B, E)$ или $\Gamma(B, \xi)$. Зачастую надо рассматривать сечения, определенные не на всей базе B, а на некотором подмножестве $U \subset B$. Пространство сечений на U обозначается $\Gamma(U, E)$ или $\Gamma(U, \xi)$.

Если ξ векторное расслоение над полем $\mathbb{K}$, то пространство сечений $\Gamma(U, \xi)$ будет векторным пространством над полем $\mathbb{K}$, операции сложения и умножения на скаляр определяются поточечно:

$$(s_1 + s_2)(x) = s_1(x) + s_2(x), \quad (k \cdot s)(x) = k \cdot s(x),\ k \in \mathbb{K}.$$

Рассмотрим тривиальное векторное расслоение $\xi = (E = B \times V, \mathrm{pr}_1, B)$ ранга k. Тогда очевидно, что у него есть k линейно независимых в каждой точке сечений: надо выбрать базис e_i, $i = 1, \dots, k$, в пространстве V и положить $s_k(x) = (x, e_i)$.

Оказывается, что верно и обратное, поэтому мы можем сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 3.2 *Гладкое векторное расслоение $\xi = (E, p, B)$ ранга k тривиально тогда и только тогда, когда существуют k линейно независимых в каждой точке гладких сечений.*

Доказательство. В одну сторону мы уже доказали, рассмотрим в обратную сторону. Пусть у нас есть k линейно независимых в каждой точке сечений s_i. Тогда мы можем определить отображение f из ξ в тривиальное расслоение $\eta = (B \times \mathbb{K}^k, \mathrm{pr}_1, B)$, где $\mathbb{K}$ поле, над которым определен слой расслоения ξ. Рассмотрим точку $e \in E$, она «висит» над точкой $x = p(e)$. Так как $s_i(x)$ линейно независимы, то они образуют базис в слое E_x, поэтому $e \in E_x$ можно разложить по этому базису:

$$e = \sum_i l^i(e) s_i(x).$$

Тогда определим f формулой

$$f(e) = (p(e), (l_1(e), \dots, l_k(e))) \in B \times \mathbb{K}^k. \tag{1}$$

То, что это гладкое отображение расслоений следует из того, что $s_i(x)$ гладкие сечения, а $l^i(e)$ гладкие функции.

Как построить обратное отображение $g : B \times \mathbb{R}^k \longrightarrow E$ совершенно очевидно: определим его «послойно»:

$$g(x, (l_1, \dots, l^k)) = \sum_i l^i s_i(x) \in E_x.$$

Гладкость этого отображения очевидна.
□

Таким образом, если у нас есть локально тривиальное векторное расслоение ξ, то можно строить склеивающие коциклы для данного тривиализующего покрытия следующим образом. В силу утверждения 3.2 в пространстве сечений $\Gamma(U_\alpha, \xi)$ можно выбрать k независимых в каждой точке сечений s_i^α. Определим диффеоморфизмы $\varphi_\alpha : p^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times V$ таким же образом, как и отображение (1) в доказательстве утверждения 3.2. Тогда легко видеть, что склеивающие коциклы $g_{\alpha\beta}(x)$, которые получатся в конечном итоге, являются матрицами перехода при заменах базиса $s_i^\beta(x)$ на базис $s_i^\alpha(x)$ в слоях над точками $x \in U_{\alpha\beta}$, где оба этих базиса определены.

4 Евклидовы и эрмитовы векторные расслоения

Грубо говоря, это такие векторные расслоения, что на каждом слое E_x задано скалярное произведение, евклидово в вещественном случае, эрмитово в комплексном случае, которое гладко зависит от точки x.

Чтобы формализовать эту гладкую зависимость, вспомним, что между симметрическими билинейными формами и квадратичными формами имеется взаимно однозначное соответствие. Поэтому наше определение будет такое:

Определение 4.1 Евклидовым скалярным произведением *на вещественном векторном расслоении* $\xi = (E, p, B)$ *называется гладкое отображение* $E \longrightarrow \mathbb{R}$, *такое что его ограничение на каждый слой* E_x *является положительно определенной квадратичной формой. Вещественное векторное расслоение с фиксированным евклидовым скалярным произведением называется* евклидовым расслоением.

Определение эрмитова скалярного произведения на комплексном векторном расслоении аналогично.

Скалярное произведение $(\,,)$ на расслоении $\xi = (E, p, B)$ индуцирует скалярные произведения $(\,,)_x$ в каждом слое E_x, $x \in B$. Если s_1 и s_2 два гладких сечения, то их поточечное скалярное произведение $(s_1(x), s_2(x))_x$ является гладкой функцией на базе B расслоения. Если B компактное риманово многообразие с формой объема ω, то при помощи интегрирования мы получаем скалярное произведение

$$< s_1, s_2 >= \int_B (s_1(x), s_2(x))_x \cdot \omega$$

в пространстве сечений $\Gamma(B, \xi)$.

Очевидно, что в тривиальном расслоении $\xi = (B \times V, \mathrm{pr}_1, B)$ легко ввести скалярное произведение исходя из произвольного скалярного произведения в векторном пространстве V. Тогда с помощью разбиения единицы можно построить скалярное произведение в любом локально тривиальном векторном расслоении. Частным случаем этого рассуждения является стандартное доказательство того, что на любом многообразии есть риманова метрика, это просто случай касательного расслоения. Таким образом, мы доказали следующее предложение.

Утверждение 4.2 *На любом вещественном векторном расслоении можно ввести евклидову структуру, а на любом комплексном — эрмитову.*

5 Расширение и редукция структурной группы

Пусть у нас есть расслоение со структурной группой G. Если G подгруппа группы H, то мы можем рассматривать склеивающие коциклы $g_{\alpha\beta} \in G \subset H$ как имеющие значения в группе H, то есть любое G-расслоение может рассматриваться как H-расслоение. Это называется расширением структурной группы.

Наоборот, может оказаться, что у G-расслоения можно выбрать такую тривиализацию, что склеивающие коциклы принимают значение в некоторой подгруппе $H \subset G$. Тогда это расслоение можно рассматривать как H-расслоение. Это называется редукцией структурной группы.

Важнейшим примером редукции структурной группы является следующее утверждение.

Утверждение 5.1 *Любое вещественное векторное* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$*-расслоение является* $\mathrm{O}(n)$*-расслоением. Любое комплексное векторное* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$*-расслоение является* $\mathrm{U}(n)$*-расслоением.*

Доказательство. Рассмотрим вещественный случай, комплексный полностью аналогичен.

В силу предложения 4.2, на нашем расслоении ξ существует евклидово скалярное произведение. Рассмотрим какую-либо тривиализацию. По предложению 3.2, в $\Gamma(U_\alpha,\xi)$ существуют n линейно независимых в каждой точке гладких сечений. Ортогонализируем их при помощи алгоритма Грама-Шмидта. Так как эта процедура сохраняет гладкость, то мы получим n ортонормированых в каждой точке гладких сечений, то есть ортонормированый базис s_i^α, определенный в слоях над U_α. Как уже объяснялось в конце раздела 3, склеивающие коциклы $g_{\alpha\beta}$ можно получить как матрицы перехода от такого базиса s_i^β на U_β к базису s_i^α на U_α. Но так как оба эти базиса ортонормированы, то преобразование перехода будет ортогональной матрицей, то есть $g_{\alpha\beta}\in\mathrm{O}(n)$, что и требовалось доказать.
$\square$

6 Ориентация вещественных векторных расслоений

Определение 6.1 *Если структурную группу вещественного векторного расслоения* ξ *можно редуцировать к группе* $\mathrm{SO}(n)$*, то такое расслоение называется* ориентирумым.

На ориентируемом расслоении можно так выбрать базисы из ортонормированых сечений над тривиализующими окрестностями, что преобразования перехода будут иметь определитель 1*. Эти базисы тогда индуцируют согласованным образом ориентацию на каждом слое* E_x*. Выбор одной из двух возможных ориентаций делает наше расслоение* ориентированным.

Легко видеть, что ориентируемое многообразие — это многообразие, касательное расслоение которого ориентируемо, а выбор ориентации многообразия — это в точности выбор ориентации его касательного расслоения.

7 Обратный образ расслоения

Пусть у нас есть гладкое расслоение $\xi=(E,p,B)$, и имеется гладкое отображение многообразий $f:M\longrightarrow B$.

Определение 7.1 Обратным образом *расслоения* ξ *при отображении* f *называется расслоение* $f^*\xi$*, определяемое следующим образом. Базой этого расслоения является многообразие* M*, тотальным пространством является пространство* $f^*E:=\{(x,e)|p(e)=f(x)\}\subset M\times E$*, а проекцией* f^*p *естественная проекция* pr_1.

Таким образом, диаграмма

$$\begin{tikzcd}
M \times E \supset f^*E \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1 = f^* p"'] & E \arrow[d, "p"] \\
M \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Слой $(f^*E)_x$ над точкой $x \in M$ равен $E_{f(x)}$.

Легко проверить, что $f^*\xi$ имеет тот же слой и структурную группу, что и ξ. Если U_α тривиализирующее покрытие ξ со склеивающими коциклами $g_{\alpha\beta}$, то $f^{-1}(U_\alpha)$ тривиализирующее покрытие $f^*\xi$, а $f^*g_{\alpha\beta}$ склеивающие коциклы, где $f^*g_{\alpha\beta}(x) := g_{\alpha\beta}(f(x))$. Таким образом, обратный образ локально тривиального расслоения тоже локально тривиален, обратный образ векторного расслоения тоже векторное расслоение и т. д.

8 Естественные операции с векторными расслоениями

Если есть векторные пространства V и W над одним и тем же полем $\mathbb{K}$, то существуют двойственное пространство V^*, прямая сумма $V \oplus W$, тензорное произведение $V \otimes W$, внешнее произведение $V \wedge V$ и т. д. Если V вещественное векторное пространство, то существует его комплексификация $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, а если V комплексное векторное пространство, то существует его овеществление rV и сопряженное пространство $\bar{V}$.

Оказывается, что все эти операции определены и для векторных расслоений. (На самом деле это верно для любого непрерывного функтора в категории конечномерных векторным пространств, см. подробности в книгах [1, 2].)

На каждом слое эти операции совпадают с соответствующей операцией в векторных пространствах, то есть, например, слой $(E^1 \oplus E^2)_x$ равен $E^1_x \oplus E^2_x$. Но чтобы задать расслоение надо еще задать и склеивающие коциклы. Это делается естественным образом: если ξ_1 и ξ_2 имели коциклы $g^1_{\alpha\beta}$ и $g^2_{\alpha\beta}$, то прямая сумма $\xi_1 \oplus \xi_2$ имеет склеивающий коцикл

$$g^1_{\alpha\beta} \oplus g^2_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} g^1_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & g^2_{\alpha\beta} \end{pmatrix},$$

тензорное произведение $\xi_1 \otimes \xi_2$ имеет склеивающий коцикл $g^1_{\alpha\beta} \otimes g^2_{\alpha\beta}$ и т. д. Найти правильные определения для ξ^*, $\xi \wedge \xi$, $r\xi$ и т. д. предлагается в качестве упражнения.

9 Что читать?

Элементарные сведения о расслоениях сейчас можно найти в любой хорошей книге по дифференциальной геометрии. Из более специальных книг можно посмотреть [1] (очень добротное введение в расслоения в первой главе, но написано очень по-бурбакистски) и [2] (написано очень живым и понятным языком, но содержит меньше материала об основах расслоений).

Список литературы

[1] Каруби М. K-теория.

[2] Милнор Дж., Сташеф Дж., Характеристические классы.