Дополнительные главы геометрии
Лекция 2
НМУ, осень 2005

А. В. Пенской

Аннотация

Лекция 2 содержит краткое повторение основных определений и результатов, касающихся связностей в векторных расслоениях и конструкции характеристических классов по Чженю-Вейлю, которые были изложены в курсе дифференциальной геометрии весной 2005 года.

1 Связности в векторных расслоениях

Пусть M гладкое многообразие, $\tau = (TM, \pi, M)$ его касательное расслоение, $\xi = (E, p, M)$ гладкое векторное расслоение над M со слоем V, который является векторным пространством над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Пусть τ^* кокасательное расслоение[1] (T^*M, π, M). Если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то нам понадобится его комплексификация $\tau^*_{\mathbb{C}} = \tau \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Определение 1.1 Связностью *(или* ковариантной производной*) в векторном расслоении ξ называется $\mathbb{K}$-линейное отображение*

$$\nabla : \Gamma(M, \xi) \longrightarrow \Gamma(M, \tau^* \otimes \xi)$$

в вещественном случае или

$$\nabla : \Gamma(M, \xi) \longrightarrow \Gamma(M, \tau^*_{\mathbb{C}} \otimes \xi)$$

в комплексном случае, удовлетворяющее правилу Лейбница

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s),$$

где $f \in C^\infty(M)$ гладкая $\mathbb{K}$-значная функция на M, а $s \in \Gamma(M, \xi)$ гладкое сечение расслоения ξ.

Давайте обсудим, что это значит. Расслоение τ^* — это кокасательное расслоение, его сечения являются 1-формами, которые можно применять к векторным полям, то есть на ∇s можно смотреть, как на 1-форму со значениями в сечениях расслоения ξ: если X векторное поле на M, то

[1] Проекции в касательном и кокасательном расслоении мы обозначим одной и той же буквой π: это, конечно же, разные отображения, но не хотелось бы загромождать текст обозначениями, а из контекста всегда ясно, о каком отображении идет речь.

результат применения ∇s к полю X (по традиции обозначаемый $\nabla_X s$) является сечением расслоения ξ.

Тогда из определения связности ∇ следует, что операция

$$\nabla_X : \Gamma(M, \xi) \longrightarrow \Gamma(M, \xi)$$

обладает следующими свойствами:

1. $\mathbb{K}$-линейность по s:

$$\nabla_X(as_1 + bs_2) = a\nabla_X s_1 + b\nabla_X s_2, \quad \text{где } a, b, \in \mathbb{K}.$$

2. $C^\infty(M)$-линейность по X:

$$\nabla_{(fX_1+gX_2)} s = f\nabla_{X_1} s + g\nabla_{X_2} s, \quad \text{где } f, g \in C^\infty(M).$$

3. Правило Лейбница:

$$\nabla_X(fs) = X(f)s + f\nabla_X s, \quad \text{где } f \in C^\infty(M),$$

а $X(f) = df(X)$ обозначает применение векторного поля X к функции f, то есть производную f по вектору X.

Можно вместо нашего определения 1.1 определить связность как операцию ∇_X, обладающую приведенными свойствами, это полностью эквивалентно.

2 Задание связности, символы Кристоффеля

Выберем на многообразии M тривиализующую окрестность U, и выберем базис e_α в сечениях[2] $\Gamma(U, \xi)$. Рассмотрим гладкое сечение s, его можно записать в этом базисе в виде[3] $s(x) = s^\alpha(x)e_\alpha$, где s^α гладкие функции. Тогда, исходя из определения связности, мы получаем

$$\nabla s = \nabla(s^\alpha e_\alpha) = ds^\alpha e_\alpha + s^\alpha \nabla(e_\alpha).$$

Как мы видим, 1-формы со значениями в сечениях $\nabla(e_\alpha)$ и определяют связность. Распишем их тоже по базису e_α:

$$\nabla(e_\alpha) = A_\alpha^\beta e_\beta,$$

тогда A_α^β являются просто 1-формами на U, и мы получаем

$$\nabla s = ds^\alpha e_\alpha + s^\alpha \nabla(e_\alpha) = ds^\alpha e_\alpha + s^\alpha A_\alpha^\beta e_\beta.$$

Для красоты давайте переименуем во втором члене индексы суммирования α в β, а β в α, и вынесем e_α за скобки, тогда мы получим такую формулу:

$$\nabla s = (ds^\alpha + s^\beta A_\beta^\alpha)e_\alpha. \tag{1}$$

[2] То есть выберем $\operatorname{rk}\xi$ сечений, линейно независимых над $\mathbb{K}$ в каждой точке

[3] Естественно, мы предполагаем суммирование по повторяющимся сверху и снизу индексам.

Эти 1-формы $A_\alpha^\beta(x)$ образуют матрицу 1-форм $A(x)$, которая отображает слой расслоения E_x в E_x, то есть является 1-формой со значениями в эндоморфизмах слоя, то есть $A \in \Gamma(U, \tau^* \otimes \mathrm{End}(\xi))$ (или $A \in \Gamma(U, \tau^*_{\mathbb{C}} \otimes \mathrm{End}(\xi))$ в комплексном случае). Заметим, что так как $\mathrm{End}\, V = V \otimes V^*$, то ясно как конструировать расслоение $\mathrm{End}(\xi)$ из ξ в терминах склеивающих коциклов.

Таким образом, мы видим, что *локально* (!) связность задается 1-формой со значениями в эндоморфизмах слоя. В разделе 4 мы объясним этот факт с другой точки зрения.

Как же записывается оперция ∇_X? Предположим, что тривиализующая окрестность U является в то же время координатной окрестностью для базы M с локальными координатами x^i. Запишем гладкое векторное поле X в базисе[4] $\frac{\partial}{\partial x^i}$:

$$X = X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Тогда мы получаем из (1)

$$\nabla_X s = (ds^\alpha(X) + s^\beta A^\alpha_\beta(X))e_\alpha = \left(X^i \frac{\partial}{\partial x^i}(s^\alpha) + s^\beta A^\alpha_\beta\left(X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)e_\alpha.$$

Так как A^α_β является 1-формой, то $A^\alpha_\beta\left(X^i\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = X^i A^\alpha_\beta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$. Пусть по определению $A^\alpha_{\beta,i} = A^\alpha_\beta\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$, тогда мы получаем конечную формулу

$$\nabla_X s = X^i\left(\frac{\partial s^\alpha}{\partial x^i} + A^\alpha_{\beta,i}s^\beta\right)e_\alpha.$$

Как легко видеть, функции $A^\alpha_{\beta,i}$ являются на самом деле координатами 1-формы A^α_β в локальном базисе 1-форм dx^i:

$$A^\alpha_\beta = A^\alpha_{\beta,i}\, dx^i.$$

Эти функции $A^\alpha_{\beta,i}$ традиционно называются (особенно в случае связностей в расслоениях тензоров) *символами Кристоффеля.*

3 Связности и замена базиса

Пусть $\tilde{e}_\alpha$ другой базис в сечениях на U, а $\tilde{A}^\beta_\alpha$ соответствующие 1-формы, такие что

$$\nabla(\tilde{e}_\alpha) = \tilde{A}^\beta_\alpha \tilde{e}_\beta,$$

Пусть $\tilde{e}_\alpha = g^\gamma_\alpha e_\gamma$, тогда

$$\nabla(g^\gamma_\alpha e_\gamma) = \tilde{A}^\beta_\alpha g^\gamma_\alpha e_\gamma,$$

из тождества Лейбница следует, что левая часть равна

$$dg^\gamma_\alpha e_\gamma + g^\gamma_\alpha \nabla e_\gamma = dg^\gamma_\alpha e_\gamma + g^\gamma_\alpha A^\beta_\gamma e_\beta.$$

Получаем равенство

$$\tilde{A}^\beta_\alpha g^\gamma_\alpha e_\gamma = dg^\gamma_\alpha e_\gamma + g^\gamma_\alpha A^\beta_\gamma e_\beta.$$

[4] На самом деле вместо этото базиса можно выбрать любой базис в векторных полях, это ничего принципиально не меняет.

Переименовывая во втором члене правой части индексы суммирования γ в β, а β в γ, мы получаем

$$\tilde{A}^{\beta}_{\alpha} g^{\gamma}_{\alpha} = dg^{\gamma}_{\alpha} + g^{\beta}_{\alpha} A^{\gamma}_{\beta}.$$

Переходя к матрицам, мы видим, что

$$\tilde{A} = dg \cdot g^{-1} + gAg^{-1}. \tag{2}$$

Это нелинейное преобразование, так что локально задающие связность 1-формы со значениями в эндоморфизмах преобразуются при замене базиса вовсе не как 1-формы со значениями в эндоморфизмах, а потому не «склеиваются» в глобальную 1-форму со значениями в эндоморфизмах. Это чрезвычайно важное обстоятельство, на которое следует обратить внимание.

4 Пространство связностей

Пусть ∇^1 и ∇^2 две связности на расслоении ξ. Тогда из определения связности (если быть точным, из тождества Лейбница) следует, что разность $\nabla^1 - \nabla^2$ коммутирует с умножением на функции:

$$(\nabla^1 - \nabla^2)(fs) = (\nabla^1(fs) - \nabla^2(fs)) =$$
$$= df \otimes s + f\nabla^1 s - df \otimes s - f\nabla^2 s = f(\nabla^1 - \nabla^2)s.$$

Но это значит, что разность двух связностей является $C^{\infty}(M)$-линейной по s, то есть является 1-формой со значениями в эндоморфизмах ξ

$$\nabla^1 - \nabla^2 = \omega \in \Gamma(M, \tau^* \otimes \mathrm{End}(\xi)).$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 4.1 *Пространство связностей на расслоении ξ является аффинным пространством, ассоциированным векторным пространством которого является пространство 1-форм со значениями в эндоморфизмах* $\Gamma(M, \tau^* \otimes \mathrm{End}(\xi))$.

(В комплексном случае надо заменить τ^* на $\tau^*_{\mathbb{C}}$.)

Рассмотрим теперь тривиальное расслоение $(M \times V, \mathrm{pr}_1, M)$. Его сечения можно отождествить с отображениями $M \longrightarrow V$, то есть с векторнозначными функциями. На этих функциях действует оператор внешнего дифференцирования d, это просто покомпонентное внешнее дифференцирование. Легко видеть, что d является связностью.

Пусть теперь ∇ произвольная связность на этом тривиальном расслоении. Тогда из утверждения 4.1 следует, что $\nabla - d = \omega$, где ω есть 1-форма со значениями в эндоморфизмах, т.е.

$$\nabla = d + \omega. \tag{3}$$

Но это в точности то же описание, что мы уже дали в разделе 2. В самом деле, если у нас имеется локально тривиальное расслоение ξ, то над тривиализующей окрестностью U мы имеем тривиальное расслоение, поэтому *локально* в U связность имеет вид (3), а это то же самое, что и формула (1), если понять, что A^{α}_{β} есть просто компоненты ω в соответствующем базисе сечений.

5 Продолжение связности на ξ-значные формы

Рассмотрим расслоение $\wedge^k \tau^* \otimes \xi$ (естественно, в комплексном случае $\wedge^k \tau^*_{\mathbb{C}} \otimes \xi$). На сечения этого расслоения можно смотреть как на k-формы со значениями в сечениях расслоения ξ. Если $X_1, \ldots, X_k$ векторные поля на M, то значение такого сечения $s \in \Gamma(M, \bigwedge^k \tau^* \otimes \xi)$ на этих векторных полях $s(X_1, \ldots, X_k)$ является обычным сечением ξ. Будем для краткости обозначать k-формы на M через $\Omega^k(M)$, а k-формы со значениями в сечениях ξ через $\Omega^k(M, \xi)$, то есть

$$\Omega^k(M, \xi) = \Gamma(M, \wedge^k \tau^* \otimes \xi),$$

$\Omega^0(M, \xi) = \Gamma(M, \xi)$ есть просто пространство гладких сечений.

Тогда на связность ∇ можно смотреть как на отображение

$$\Omega^0(M, \xi) \xrightarrow{\nabla} \Omega^1(M, \xi).$$

Мы можем продолжить его до отображения на произвольных k-формах

$$\Omega^k(M, \xi) \xrightarrow{\nabla} \Omega^{k+1}(M, \xi),$$

определив связность на разложимых формах по правилу Лейбница

$$\nabla(\theta \otimes s) = d\theta \otimes s + (-1)^{\deg \theta} \theta \wedge \nabla s,$$

где $\theta \in \Omega^k(M)$, а s гладкое сечение, а потом продлив по линейности на все k-формы.

6 Кривизна связности

Рассмотрим квадрат связности, т.е. отображение

$$\nabla^2 : \Omega^k(M, \xi) \longrightarrow \Omega^{k+2}(M, \xi).$$

Априори это сложный дифференциальный оператор второго порядка, но на самом деле оказывается, что все гораздо проще.

Утверждение 6.1 *Пусть $\theta \in \Omega^k(M, \xi)$. Тогда $\nabla^2\theta = F \wedge \theta$, где F некоторая 2-форма со значениями в эндоморфизмах ξ, то есть ∇^2 есть просто операция умножения на F.*

Доказательство. В тривиализующей окрестности $\nabla = d + \omega$, то есть $\nabla\theta = d\theta + \omega \wedge \theta$. Тогда

$$\nabla^2\theta = (d + \omega) \wedge (d\theta + \omega \wedge \theta) =$$

$$= d^2\theta + d\omega \wedge \theta - \omega \wedge d\theta + \omega \wedge d\theta + \omega \wedge \omega \wedge \theta =$$

$$= d\omega \wedge \theta + \omega \wedge \omega \wedge \theta,$$

то есть если положить $F = d\omega + \omega \wedge \omega$, то $\nabla^2\theta = F \wedge \theta$.

Но это локальное рассуждение. Мы уже видели, что 1-формы ω, задающие локально связность, не склеиваются в глобальную 1-форму со значениями в эндоморфизмах. Тем не менее, можно проверить (оставим это как упражнение), что если ω преобразуется при заменах базиса в сечениях по правилу (2):

$$\tilde{\omega} = dg \cdot g^{-1} + g\omega g^{-1},$$

то $F = d\omega + \omega \wedge \omega$ преобразуется при заменах базиса в сечениях по правилу

$$\tilde{F} = gFg^{-1}, \tag{4}$$

а потому образуют корректно определенную глобальную 2-форму со значениями в эндоморфизмах.

$\square$

Определение 6.2 *Описанная выше 2-форма со значениями в эндоморфизмах F, соответствующая ∇^2, называется* формой кривизны, *или иногда просто* кривизной.

Утверждение 6.3 *Значение формы кривизны на векторных полях X и Y может быть вычислено по формуле*

$$F(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}.$$

Доказательство оставляется читателю в качестве упражнения.
$\square$

7 Связности, согласованные с метрикой

Пусть у нас есть евклидово или эрмитово расслоение ξ с метрикой $(\,,)$.

Определение 7.1 *Связность ∇ называется* согласованной *с метрикой $(\,,)$, если для любых двух сечений s и t верно тождество*

$$d(s, t) = (\nabla s, t) + (s, \nabla t). \tag{5}$$

То же самое можно переписать в виде

$$X(s, t) = (\nabla_X s, t) + (s, \nabla_X t),$$

где $X(s, t)$ означает производную функции (s, t) вдоль векторного поля X.

8 Естественные операции с векторными расслоеними и связности

Как мы уже видели в прошлой лекции, для векторных расслоений определены естественные операции прямой суммы, тензорного произведения, перехода к двойственному расслоению, комплексификации и т. д. Во всех этих случаях существует и естественное продолжение связностей.

Например, если в расслоении ξ_1 есть связность ∇^1, а в расслоении ξ_2 есть связность ∇^2, то в тензорном произведении $\xi_1 \otimes \xi_2$ можно определить связность формулой

$$\nabla = \nabla^1 \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^2,$$

то есть
$$\nabla(s_1 \otimes s_2) = \nabla^1 s_1 \otimes s_2 + s_1 \otimes \nabla^2 s_2.$$
Соответствующая кривизна F имеет вид
$$F = F^1 \otimes 1 + 1 \otimes F^2.$$
Читателям предоставляется написать естественные продолжения связностей и их кривизн для всех естественных операций.

Что же до обратного образа, то в расслоении $f^*\xi$ можно ввести такую связность, что ее локальная 1-форма связности имеет вид $f^*\omega$, а соответствующая 2-форма кривизны имеет вид f^*F.

При этих операциях с расслоениями существуют и очевидные естественные продолжения метрик с исходных расслоений на новые. Можно проверить, что если начать с согласованных с метрикой связностей, то полученные связности будут снова согласованными с полученными метриками. Читатель может проверить это в качестве упражнения.

9 Связности и кривизны в $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{O}(n)$ и $\mathrm{SO}(n)$-расслоениях

Пусть у нас есть евклидово расслоение ξ ранга n с метрикой $(\,,)$, а ∇ согласованная с ней связность. Как уже говорилось в прошлой лекции, евклидова структура позволяет редуцировать структурную группу расслоения к группе $\mathrm{O}(n)$ (или $\mathrm{SO}(n)$, если расслоение ориентировано).

Рассмотрим тривиализирующую окрестность U, пусть в ней связность имеет вид $\nabla = d + \omega$, а $F = d\omega + \omega \wedge \omega$ соответствующая форма кривизны.

Утверждение 9.1 *Для согласованной связности в евклидовом расслоении матрицы ω и F являются кососимметричными, то есть $\omega, F \in \mathfrak{so}(n)$.*

Доказательство. Из (5) следует, что
$$0 = d(e_\alpha, e_\beta) = (\nabla e_\alpha, e_\beta) + (e_\alpha, \nabla e_\beta) = A_\alpha^\beta + A_\beta^\alpha,$$
что и требовалось доказать: $\omega^T = -\omega$.

Тогда
$$F^T = (d\omega + \omega \wedge \omega)^T = d\omega^T - \omega^T \wedge \omega^T = -d\omega - \omega \wedge \omega = -F,$$
где мы меняли местами две матрицы из 1-форм, поэтому $(\omega \wedge \omega)^T = -\omega^T \wedge \omega^T$.

□

Совершенно аналогично доказывается и следующее утверждение.

Утверждение 9.2 *Для согласованной связности в эрмитовом расслоении матрицы ω и F являются косоэрмитовыми, то есть $\omega, F \in \mathfrak{u}(n)$.*

Важность этих утверждений будет видна в разделе 10.

10 Инвариантные многочлены на алгебрах Ли и конструкция характеристических классов по Чженю-Вейлю

Пусть G матричная (для простоты) алгебра Ли, а $\mathfrak{g}$ соответствующая алгебра Ли.

Определение 10.1 Инвариантным многочленом *на алгебре Ли* $\mathfrak{g}$ *мы называем такое полиномиальное отображение* $P : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{K}$, *что*

$$P(gXg^{-1}) = P(X) \quad \text{для любых } X \in \mathfrak{g}, g \in G.$$

Из курса линейной алгебры известно, например, что полиномиальные отображения det и tr являются инвариантными многочленами.

Как мы видели в разделе 9, для согласованной связности матрица кривизны F лежит в $\mathfrak{g}$ и преобразуется по правилу (4):

$$\tilde{F} = gFg^{-1},$$

где $G = \mathrm{SO}$, O или U в зависимости от ситуации. Это говорит о том, что если P инвариантный многочлен на $\mathfrak{g}$, то $P(F)$ не меняется при заменах базиса в сечениях, то есть является глобальной корректно определенной дифференциальной формой.

Обратите внимание на то, что так как кривизна является 2-формой, то это будет дифференциальная форма четного порядка, а такие формы коммутируют.

Априори форма $P(F)$ зависит от выбора метрики и согласованной с ней связности. Но как мы увидим несколько позже, это *замкнутая форма,* и *ее когомологический класс* не зависит от этого выбора.

Определение 10.2 *Когомологический класс* $[P(F)] \in H^{2*}(M)$ *дифференциальной формы* $P(F) \in \Omega^{2*}(M)$ *называется характеристическим классом (соответстующим инвариантному многочлену* P*.).*

Свойства характеристических классов мы опишем чуть позже, а пока мы обсудим, какие бывают инвариантные многочлены в интересных для нас случаях групп $G = \mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{U}(n)$. Мы не будем давать строгого доказательства со всеми деталями (это сюжет теории инвариантов), а дадим эскиз рассуждения.

Рассмотрим сначала более простой комплексный случай. Пусть $G = \mathrm{U}(n)$. Тогда оказывается, что с помощью сопряжения унитарной матрицей из G любую косоэрмитову матрицу X из $\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n)$ можно привести к диагональному виду

$$X = \begin{pmatrix} 2\pi i x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2\pi i x_n \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$x_i \in \mathbb{R}$, поэтому инвариантный многочлен полностью определяется своими значениями на матрице такого вида. Так что можно считать, что инвариантный многочлен P есть просто многочлен от переменных x_i с комплексными коэффициентами. Тем не менее, заметим, что сопряжением с помощью унитарных матриц можно менять эти x_i местами, поэтому P должен быть *симметрическим* многочленом от переменных x_i. Это и есть правильный ответ: инвариантные многочлены (а значит, и характеристические классы) соответствуют симметрическим многочленам от $x_1, \ldots, x_n$. Рассмотрим симметрические многочлены

$$\begin{aligned} c_0(X) &= 1, \\ c_1(X) &= x_1 + \cdots + x_n, \\ c_2(X) &= x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n \\ &\ldots \\ c_n(X) &= x_1 \cdots x_n, \end{aligned}$$

которые удобно определить формулой

$$\det\left(I + \frac{X}{2\pi i}\right) = c_0(X) + c_1(X) + \cdots + c_n(X),$$

где в правой части стоит разложение многочлена на однородные слагаемые. Эти многочлены образут базис в инвариантых многочленах.

Определение 10.3 *Когомологический класс* $[c_i(F)] \in H^{2i}(M)$ *называется* i*-м классом Чженя комплексного расслоения* ξ. *Неоднородный когомологический класс* $[c(F)] = [c_0(F) + \cdots + c_n(F)] \in H^{2*}(M)$ *называется полным классом Чженя расслоения* ξ.

Часто «Чжень» пишут и произносят как «Черн», следуя англоязычной традиции написания фамилии этого математика (Chern S. S.).

Рассмотрим теперь вещественный случай, когда $G = \mathrm{O}(n)$ или $\mathrm{SO}(n)$. Здесь матрицу X из $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n)$ можно привести сопряжением матрицей из G к блочно-диагональному виду

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi y_1 & & & 0 \\ -2\pi y_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 2\pi y_l \\ 0 & & & -2\pi y_l & 0 \end{pmatrix} \qquad (7)$$

если $n = 2l$ четно, или

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2\pi y_1 & & & & 0 \\ -2\pi y_1 & 0 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 0 & 2\pi y_l & \\ 0 & & & -2\pi y_l & 0 & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

если $n = 2l + 1$ нечетно, где $y_i \in \mathbb{R}$, поэтому инвариантный многочлен полностью определяется своими значениями на матрицах такого вида.

Так что можно считать, что инвариантный многочлен P есть просто многочлен от переменных y_i с вещественными коэффициентами. Тем не менее, заметим, что сопряжением с помощью матриц из G можно менять 2×2-блоки

$$\begin{pmatrix} 0 & 2\pi y_i \\ -2\pi y_i & 0 \end{pmatrix}$$

местами, а кроме того при $G = \mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(2l+1)$ можно менять $2\pi y_i$ и $-2\pi y_i$ местами, а при $G = \mathrm{SO}(2l)$ можно менять местами четное число раз $2\pi y_i$ и $-2\pi y_i$.

В результате мы получаем, что инвариантными многочленами для $G = \mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(2l+1)$ являются *симметрические многочлены от* y_i^2, а для $G = \mathrm{SO}(2l)$ *симметрические многочлены от* y_i^2 *и симметрические многочлены от* y_i^2, *умноженные на* $y_1 \cdots y_l$.

Аналогично многочленам $c_i(X)$ определим многочлены $p_i(X)$ с помощью разложения

$$\det\left(I + \frac{X}{2\pi}\right) = p_0(X) + p_1(X) + \cdots + p_l(X),$$

где в правой части разложение на однородные слагаемые. Ясно, что $p_0 = 1$, а $\deg p_i = 4i$. Эти многочлены образут базис в инвариантых многочленах для $G = \mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(2l+1)$.

Напомним, что в линейной алгебре определяется *Пфаффиан* Pf кососимметрической матрицы: это такой многочлен, что $\det(X) = (\mathrm{Pf}(X))^2$. Легко видеть, что для матрицы X из (7)

$$\mathrm{Pf}\left(\frac{X}{2\pi}\right) = y_1 \cdots y_l,$$

то есть p_i и $\chi(X) = \mathrm{Pf}\left(\frac{X}{2\pi}\right)$ образуют базис в инвариантных многочленах для $G = \mathrm{SO}(2l)$.

Определение 10.4 *Когомологический класс* $[p_i(F)] \in H^{4i}(M)$ *называется* i*-м классом Понтрягина вещественного расслоения* ξ. *Неоднородный когомологический класс* $[p(F)] = [p_0(F) + \cdots + p_l(F)] \in H^{4*}(M)$ *называется полным классом Понтрягина расслоения* ξ.

Когомологический класс $[\chi(F)]$ *называется классом Эйлера вещественного ориентированного расслоения* ξ.

Докажем теперь важнейшие свойства характеристических классов.

Пусть $P(X)$ некоторый инвариантный многочлен, а F форма кривизны некоторой связности, согласованной с метрикой. В зависимости от ситуации структурная группа $G = \mathrm{U}(n)$, $\mathrm{U}(n)$ или $\mathrm{SO}(n)$.

Утверждение 10.5 *Форма* $P(F)$ *замкнута.*

Доказательство. Многочлен $P(X)$ инвариантен, то есть для любого $g \in G$ верно равенство $P(gXg^{-1}) = P(X)$. Если $g = I + \varepsilon Y + \ldots$, $Y \in \mathfrak{g}$, то $gXg^{-1} = X + \varepsilon[Y, X] + \ldots$, а поэтому

$$P(gXg^{-1}) = P(X) + \varepsilon \frac{\partial P(X)}{\partial X^\alpha_\beta}[Y, X]^\alpha_\beta + \ldots,$$

так что из условия инвариантности следует, что

$$\frac{\partial P(X)}{\partial X_\beta^\alpha}[Y,X]_\beta^\alpha = 0. \tag{8}$$

С другой стороны,

$$dP(F) = \frac{\partial P(F)}{\partial F_\beta^\alpha} dF_\beta^\alpha.$$

Вспомним, что $F = d\omega + \omega\wedge\omega$, поэтому $dF = d\omega\wedge\omega - \omega\wedge d\omega$. Но $d\omega = F - \omega\wedge\omega$, поэтому $dF = (F - \omega\wedge\omega)\wedge\omega - \omega\wedge(F - \omega\wedge\omega) = [F,\omega]$, откуда

$$dP(F) = \frac{\partial P(F)}{\partial F_\beta^\alpha}[F,\omega]_\beta^\alpha = 0$$

в силу уравнения (8), так как из утверждений 9.1, 9.2 следует, что F, $\omega \in \mathfrak{g}$

□

Утверждение 10.6 *Когомологический класс $[P(F)]$ не зависит от выбора связности ∇.*

Доказательство. Пусть ∇^0, ∇^1 две связности, а F^0 и F^1 соответствующие кривизны.

Можно явно сконструировать такую форму θ, что $P(F^0) - P(F^1) = d\theta$, но можно привести более простое «неявное» доказательство.

Рассмотрим многообразие $M\times\mathbb{R}$ и отображение $\mathrm{pr}_1 : M\times\mathbb{R} \longrightarrow M$. Тогда в расслоении $\mathrm{pr}_1^*\xi$ (то есть обратном образе расслоения ξ) есть связности $\mathrm{pr}_1^*\nabla^0$ и $\mathrm{pr}_1^*\nabla^1$.

Рассмотрим связность $\nabla^t = t\mathrm{pr}_1^*\nabla^1 + (1-t)\mathrm{pr}_1^*\nabla^0$ в расслоении $\mathrm{pr}_1^*\xi$ и ее форму кривизны F^t. Форма $P(F_t)$ замкнутая форма на $M\times\mathbb{R}$.

Пусть теперь $i_0 : x \mapsto (x,0)$ и $i_1 : x \mapsto (x,1)$ два отображения M в $M\times\mathbb{R}$.

Видно, что связность $i_0^*\nabla^t$ совпадает с ∇^0, а потому $i_0^*P(F^t) = P(F^0)$, точно так же и $i_1^*P(F^t) = P(F^1)$.

Так как отображения i_0 и i_1 гомотопны, то $P(F^0)$ и $P(F^1)$ когомологичны.

□

Так как от выбора связности в расслоении ξ ничего не зависит, то вместо $[P(F)]$ мы будем писать просто $[P(\xi)]$, и даже просто $P(\xi)$. Конечно же, не совсем правильно обозначать одинаково и форму, и ее когомологический класс, но это удобно, и из контекста обычно ясно, что имеется в виду.

Утверждение 10.7

$$f^*P(\xi) = P(f^*\xi).$$

Доказательство. Совершенно очевидно, если в качестве связности в $f^*\xi$ взять $f^*\nabla$, где ∇ связность в ξ.

□

Заметим, что априори классы Чженя $c_i(\xi)$ лежат в $H^{2i}(M,\mathbb{C})$, но на самом деле они лежат в $H^{2i}(M,\mathbb{R})$. Доказательство этого оставляется читателю в качестве упражнения.

Заметим также, что можно брать не только инвариантные полиномы, но и инвариантные ряды, сходящиеся на всей числовой оси. Это дает нам возможность определить некоторые важные *неоднородные* характеристические классы, то есть являющиеся суммами слагаемых разной степени. Важнейшими из них являются характер Чженя и класс Тодда.

Пусть ξ комплексное векторное расслоение. Выберем согласованную с эрмитовой метрикой связность ∇, пусть F ее форма кривизны.

Определение 10.8 Характером Чженя $\mathrm{ch}(\xi)$ *называется (неоднородный) когомологический класс формы* $\mathrm{tr}\, e^{\frac{F}{2\pi i}}$.

Определение 10.9 Классом Тодда $\mathcal{T}(\xi)$ *называется (неоднородный) когомологический класс формы* $\det\left(\frac{\frac{F}{2\pi i}}{1-e^{-\frac{F}{2\pi i}}}\right)$.

Характеристическим классом многообразия называют характеристический класс его касательного расслоения.

Определение 10.10 *Классом Тодда* $\mathrm{Td}(M)$ *многообразия* M *называют класс Тодда комплексификации* TM*:*

$$\mathrm{Td}(M) = \mathcal{T}(TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}).$$

11 Образующие У и доказательство тождеств

Для характеристических классов можно доказать много интересных тождеств, очень полезных на практике, например, формулу Уитни для классов Чженя.

Утверждение 11.1 *Пусть* ξ_1 *и* ξ_2 *два комплексных расслоения. Тогда*

$$c(\xi_1 \oplus \xi_2) = c(\xi_1)c(\xi_2).$$

Вместо одного доказательства, мы дадим сразу несколько.

Мы сначала дадим некоторое «некорректное» рассуждение.

Введем связности ∇^i в расслоениях ξ_i. Пусть F^i их формы кривизны. *Приведем матрицы* F^i *к диагональному виду* (6), где на диагонали стоят «формы» $2\pi i x_k^i$. Тогда

$$c(F^i) = \det\left(I + \frac{F^i}{2\pi i}\right) = \prod_k (1 + x_k^i) = (1 + x_1^i)(1 + x_2^i)\cdots$$

С другой стороны, в расслоении $\xi_1 \oplus \xi_2$ есть естественная связность $\nabla = \nabla^1 \oplus \nabla^2$, кривизна которой является блочно-диагональной матрицей

$$F = \begin{pmatrix} F^1 & 0 \\ 0 & F^2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, F тоже будет иметь диагональный вид с «формами» $2\pi i x_1^1, \ldots, 2\pi i x_n^1, 2\pi i x_1^2, \ldots, 2\pi i x_m^2$ на диагонали.

Но тогда

$$c(F) = (1 + x_1^1)\cdots(1 + x_n^1)(1 + x_1^2)\cdots(1 + x_m^2) = c(F^1)c(F^2),$$

что и требовалось доказать.

Это очень простое рассуждение, но оно некорретно по той причине, что «формы» x_k^i (которые называются образующими У[5]) на самом деле не являются формами.

Для обоснования этого метода можно сослаться на топологический *принцип расщепления,* который говорит, что полиномиальные тождества между характеристическими классами достаточно доказывать для прямых сумм линейных (то есть ранга 1) расслоений. Но мы поступим проще.

Докажем сперва наше утверждение уж вовсе честно. Пусть A^1 и A^2 две косоэрмитовых матрицы, а

$$A = \begin{pmatrix} A^1 & 0 \\ 0 & A^2 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\det(I + A) = \det(I + A^1)\det(I + A^2), \tag{9}$$

это очевидное равенство для матриц следует из утверждения про определитель с углом нулей. Но тогда если вместо A^i мы подставим в тождество (9) матрицы 1-форм кривизны $\dfrac{F^i}{2\pi i}$, а вместо A матрицу 1-формы кривизны $\dfrac{F}{2\pi i}$, то это тождество останется верным, а мы получим искомое утверждение.

Но тождество (9) является тождеством для косоэрмитовых *числовых матриц,* которые и в самом деле диагонализируются, поэтому для них наше рассуждение с $2\pi i x_i$ вполне корректно. Это дает нам объяснение того, почему наше рассуждение с образующими У корректно: на самом деле надо сперва доказать полиномиальное тождество для числовых матриц, используя их собственные значения $2\pi i x_i$, которые и в самом деле определены, а потом подставить в эти полиномиальные тождества матрицы формы кривизны. Образующих У на самом деле нет, но рассуждения с ними являются «краткой формой» такого рассуждения.

В качестве упражнения читатель может доказать формулы Уитни для полного класса Понтрягина суммы вещественных расслоений.

Ясно, что похожим образом можно анализировать и то, что происходит с характеристическими классами при операциях тензорного умножения расслоений, овеществления, комплексификации и т. д. Читатель может в качестве упражнения вывести эти формулы. Например, следующую формулу.

Утверждение 11.2 *Пусть ξ комплексное расслоение ранга n, а $r\xi$ его овеществление. Тогда*

$$\chi(r\xi) = c_n(\xi).$$

Важнейшим для нас будут следующие свойства характера Чженя.

Утверждение 11.3 *Пусть ξ_1, ξ_2 два комплексных расслоения. Тогда*

$$\operatorname{ch}(\xi_1 \oplus \xi_2) = \operatorname{ch}(\xi_1) + \operatorname{ch}(\xi_2),$$

$$\operatorname{ch}(\xi_1 \otimes \xi_2) = \operatorname{ch}(\xi_1)\operatorname{ch}(\xi_2).$$

[5] иногда их называют образующими Ву, так как по английски эта фамилия пишется как Wu.

Во второй формуле $\mathrm{ch}(\xi_1)$ и $\mathrm{ch}(\xi_2)$ умножаются, конечно же, внешним образом, $\mathrm{ch}(\xi_1) \wedge \mathrm{ch}(\xi_2)$, но мы часто не будем писать знак $\wedge$ умножая формы, подразумевая его.

Доказать эти равенства легко, если заметить, что в терминах образующих У характер Чженя задается формулой $\mathrm{ch}(\xi) = e^{x_1} + \cdots + e^{x_n}$.

12 Что читать?

Изложение связностей в векторных расслоениях сейчас можно найти в любой хорошей книге по дифференциальной геометрии. Конструкцию характеристических классов по Чженю-Вейлю можно найти, например, в книгах [1] (строгое, но несколько сухое изложение), [2] (очень короткое, но понятное изложение), [3] (очень хорошее изложение, но затерянное в дебрях массы других не менее полезных сведений), а также [4] (во вводной главе есть ужасно краткое, но очень ясное изложение).

Список литературы

[1] Кобаяси, Номидзу, Дифференциальная геометрия.

[2] Милнор Дж., Сташеф Дж., Характеристические классы.

[3] Постников, М. М., Лекции по геометрии, семестр IV, Дифференциальная геометрия.

[4] Berline N., Getzler E., Vergne M., Heat Kernels and Dirac operators.