# Дополнительные главы геометрии
# Лекция 3
# НМУ, осень 2005

А. В. Пенской

**Аннотация**

Цель лекции 3 — сформулировать теорему Атьи-Зингера, выражающую индекс дифференциального оператора, действующего на сечениях расслоения, в топологических терминах. Формулировка содержит в себе много новых понятий, их введению и посвящена данная лекция. Примеры применения теоремы Атьи-Зингера будут рассмотрены в следующих лекциях. Ясно, что без примеров это будет казаться довольно абстрактным, поэтому читатель не должен пугаться того, что после этой лекции в его голове будет сумбур — все уляжется после рассмотрения примеров в следующих лекциях.

## 1 Симметризация абелевого моноида

Как мы уже видели в лекции 1, векторные расслоения с одной и той же базой можно складывать: операция получения прямой суммы векторных пространств даёт нам естественную операцию прямой суммы векторных расслоений с одной и той же базой $B$.

Так как расслоение $\xi \oplus \eta$ естественно изоморфно расслоению $\eta \oplus \xi$, то эта операция коммутативна: мы будем рассматривать расслоения с точностью до изоморфизма.

Если рассматривать расслоение нулевого ранга $\underline{0} = (B \xrightarrow{\mathrm{id}} B)$ слоем которого является точка, то оно будет нейтральным элементом для операции суммы.

Здесь мы воспользовались иногда удобным соглашением обозначать тривиальное расслоение ранга $k$ через $\underline{k}$ (естественно, что этим обозначением разумно пользоваться только тогда, когда из контекста ясно, какая база у этого тривиального расслоения).

Тем не менее, у расслоений нет обратных элементов относительно этой операции сложения.

**Определение 1.1** *Множество $M$ с операцией $+$, удовлетворяющей всем аксиомам абелевой группы кроме существования обратного элемента, называется* абелевым моноидом.

Так как надо ещё и указывать нейтральный элемент, то абелев моноид является тройкой $(M, 0, +)$. Но часто его обозначают просто $M$.

В качестве примеров абелевых моноидов можно рассмотреть неотрицательные целые числа по сложению $(\mathbb{Z}_+, 0, +)$, ненулевые целые числа по умножению $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, 1, \cdot)$, а также все целые числа по умножению $(\mathbb{Z}, 1, \cdot)$.

Дадим теперь следующее определение.

**Определение 1.2** *Абелева группа $K(M)$, снабжённая гомоморфизмом абелевых моноидов $s : M \longrightarrow K(M)$, называется* симметризацией *или* группой Гротендика[1] *абелева моноида $M$, если для любой абелевой группы $G$ любой гомоморфизм моноидов $M \longrightarrow G$* единственным образом *пропускается через $s$, то есть существует* единственный *гомоморфизм абелевых групп $K(M) \longrightarrow G$, такой что диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr] \arrow[dr, "s"'] & & G \\
& K(M) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

*коммутативна.*

Конструировать $K(M)$ можно различными способами, мы поступим следующим образом. Рассмотрим $M \times M$, элементы этого декартова произведения будем записывать в виде $x - y$, где $x, y \in M$. Сложение в моноиде $M \times M$ определяется покомпонентно.

Теперь введём на $M \times M$ отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом: $x - y \sim x' - y'$ тогда и только тогда, когда существует элемент $z \in M$, такой что $x + y' + z = x' + y + z$ в $M$.

Легко проверить, что фактормоноид $M \times M/\sim$ на самом деле является группой, и является искомой симметризацией, если взять в качестве $s$ отображение $s(x) = [x - 0]$, где $[\,]$ обозначает класс эквивалентности относительно $\sim$ . Проверка оставляется читателю в качестве упражнения.

Легко видеть, что любой элемент симметризации может быть (в общем-то, не единственным способом) записан в виде $s(x) - s(y) = [x] - [y]$.

Рассмотрим теперь, что это даёт в наших примерах. В случае $M = (\mathbb{Z}_+, 0, +)$ получаем $K(M) = \mathbb{Z}$ как группа по сложению, отображение $s$ является просто вложением.

В случае $M = (\mathbb{Z} \setminus \{0\}, 1, \cdot)$ получаем $K(M) = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ как группа по умножению, отображение $s$ снова является просто вложением.

Случай $M = (\mathbb{Z}, 1, \cdot)$ интересен тем, что здесь $K(M)$ состоит только из нуля. В самом деле, легко видеть, что любой элемент из $M \times M$ эквивалентен $(0, 0)$, так как для любого целого $n$ произведение $n \cdot 0 = 0$. Поэтому отображение $s$ переводит любой элемент в ноль, и, следовательно, не является инъективным.

Рассмотрим теперь моноид $\mathrm{Vec}(B)$, элементами которого являются классы изоморфизма векторных расслоений над базой $B$ с операцией прямой суммы.

**Определение 1.3** *Симметризация $K(\mathrm{Vec}(B))$ обозначается просто $K(B)$ и называется $K$-группой пространства $B$.*

[1] Вообще-то, группой Гротендика называют симметризацию некоторого специального вида моноидов, но мы не будем вдаваться в такие различия.

Ясно, что мы можем рассматривать вещественные и комплексные векторные расслоения, так что на самом деле имеются две разных $K$-группы: вещественная $K_{\mathbb{R}}(B)$ и комплексная $K_{\mathbb{C}}(B)$. Обычно из контекста будет ясно, о какой именно группе идёт речь, и мы не будем явно указывать поле.

## 2 $K$-группа многообразия

Рассмотрим гладкое компактное многообразие $M$ и его $K$-группу[2] $K(M)$.

**Определение 2.1** *Элементы* $[\xi]-[\eta]$ *группы* $K(M)$ *называют* виртуальными расслоениями.

Мы не будем сильно углубляться в $K$-теорию, но приведём несколько элементарных результатов.

Сначала докажем несколько вспомогательных фактов. Мы к сожалению не вводили в первой лекции понятий подрасслоения, факторраслоения и ортогонального дополнения, но читатель может сам сделать это в качестве упражнения, это совершенно естественные конструкции, индуцированные соответствующими конструкциями в векторных пространствах.

**Утверждение 2.2** *Пусть $\xi$ расслоение ранга $k$ над компактным многообразием $M$. Тогда существует некоторое расслоение $\xi'$, такое что сумма $\xi \oplus \xi'$ тривиальное расслоение.*

**Доказательство.** Достаточно доказать, что $\xi$ можно вложить в некоторое тривиальное расслоение $\underline{N}$, тогда в качестве $\xi'$ можно будет взять ортогональное дополнение к $\xi'$.

Рассмотрим тривиализующее покрытие $U_i$. Можно считать, что число тривиализующих окрестностей конечно, $i = 1, \ldots, l$, так как $M$ компактно.

Рассмотрим тривиализующую окрестность $U_i$. Как уже отмечалось, тривиальность расслоения эквивалентна существованию базиса в сечениях $e^i_j$ над $U_i$.

Рассмотрим теперь двойственное расслоение $\xi'$. Ясно, что для него $U_i$ тоже будут тривиализующими окрестностями. Выберем двойственный к $e^i_j$ базис $\varepsilon^i_j$ в сечениях расслоения $\xi'$.

Рассмотрим теперь разбиение единицы $1 = \sum_i \rho_i$, подчиненное покрытию $U_i$. Рассмотрим сечения $f^i_j = \rho_i \varepsilon^i_j$. Эти сечения определены уже на всем многообразии $M$.

Рассмотрим теперь тривиальное расслоение $\underline{N}$, где $N = l \cdot \mathrm{rk}\, \xi$. В него-то мы и будем вкладывать наше расслоение $\xi$.

[2] Априори, если рассматривать гладкие расслоения над $M$, то должна получиться одна $K$-группа, а если топологические (непрерывные), то другая. Но на самом деле результат будет один и тот же. Мы не будем вдаваться в подробности, так как это уведёт нас далеко в сторону от наших целей, но дело в том, что в каждом классе изоморфизма топологических расслоений есть гладкие расслоения (грубо говоря это так, потому что непрерывные функции можно приближать гладкими, а «близкие» расслоения изоморфны), а если два гладких расслоения изоморфны как топологические, то они и гладко изоморфны (грубо говоря, этот факт сродни тому, что непрерывно гомотопные гладкие отображения гладко гомотопны).

Вложение $\xi$ в $\underline{N} = M \times \mathbb{K}^N$ мы зададим формулой

$$(x, v) \mapsto (x, [< f_1^1(x), v >, \dots, < f_k^1(x), v >, < f_1^2(x), v >, \dots]),$$

где $x \in M$, $v$ лежит в слое $E_x$ расслоения $\xi$ над $x$, $[\dots]$ обозначает вектор из $\mathbb{K}^N$, а $<,>$ обозначает спаривание между элементами слоя $E_x$ расслоения $\xi$ и слоя $E_x^*$ расслоения $\xi^*$.

Инъективность этого отображения легко доказать, исходя из того, что для любой точки $x$ существует содержащая её окрестность $U_i$, а значит $f_1^i, \dots, f_k^i$ образуют двойственный базис к базису в $E_x$, поэтому спаривания $< f_1^i(x), v >, \dots, < f_k^i(x), v >$ не обращаются одновременно в ноль ни для какого вектора $v \in E_x$.

$\square$

Из этого немедленно вытекает следующее утверждение.

**Утверждение 2.3** *Любое виртуальное расслоение может быть представлено в виде* $[\xi] - [\underline{N}]$.

**Доказательство.** В самом деле, рассмотрим виртуальное расслоение $[\eta] - [\theta]$. По утверждению 2.2 существует расслоение $\theta'$, такое что $\theta \oplus \theta' = \underline{N}$. Тогда

$$[\eta] - [\theta] = [\eta \oplus \theta'] - [\theta \oplus \theta'] = [\eta \oplus \theta'] - [\underline{N}],$$

если мы теперь положим $\xi = \eta \oplus \theta'$, то мы получим искомое утверждение.

$\square$

Так как любое виртуальное расслоение может быть представлено в виде $[\xi] - [\underline{N}]$, то хотелось бы знать, когда $[\xi] - [\underline{N}] = [\eta] - [\underline{M}]$. Перенося слагаемые с минусом в другую сторону, мы видим, что достаточно рассмотреть вопрос, когда $[\xi] = [\eta]$.

**Определение 2.4** *Расслоения $\xi$ и $\eta$ называются* стабильно эквивалентными, *если существует тривиальное расслоение $\underline{N}$, такое что $\xi \oplus \underline{N} = \eta \oplus \underline{N}$.*

Например, касательное расслоение к двумерной сфере $\tau_{\mathbb{S}^2}$ стабильно эквивалентно $\underline{2}$, так как сумма касательного расслоения и нормального расслоения (а это одномерное тривиальное расслоение, так как сфера ориентируема) является тривиальным расслоением ранга 3 (это прямое произведение сферы и объемлющего трёхмерного пространства).

**Утверждение 2.5** *Виртуальные расслоения $[\xi]$ и $[\eta]$ равны тогда и только тогда, когда расслоения $\xi$ и $\eta$ стабильно эквивалентны.*

**Доказательство.** Если $\xi$ и $\eta$ стабильно эквивалентны, то из определения эквивалентности $\sim$ немедленно следует, что $[\xi] = [\eta]$.

Пусть теперь $[\xi] = [\eta]$. Это значит, что $\xi - 0 \sim \eta - 0$, а по определению $\sim$ это значит, что существует некоторое расслоение $\theta$, такое что

$$\xi \oplus \theta = \eta \oplus \theta. \tag{1}$$

Но по утверждению 2.2 существует такое расслоение $\theta'$, что $\theta \oplus \theta' = \underline{N}$. Добавив $\theta'$ к равенству (1), мы получаем

$$\xi \oplus \underline{N} = \eta \oplus \underline{N},$$

то есть $\xi$ и $\eta$ стабильно эквивалентны.

□

С помощью этого утверждения можно доказать, что $K$-группа связного компактного многообразия равна прямой сумме $\mathbb{Z}$ и группы классов стабильной эквивалентности расслоений. Читатель может попытаться доказать это в качестве упражнения.

По определению $K$-группы, через неё пропускаются гомоморфизмы из абелева моноида $\mathrm{Vec}(M)$ в абелевы группы. Рассмотрим примеры.

Рассмотрим сначала элементарный пример. У нас есть гомоморфизм моноидов $\mathrm{rk} : \mathrm{Vec}(M) \longrightarrow \mathbb{Z}$, дающий ранг расслоения. Он задаёт единственным образом гомоморфизм абелевых групп $\mathrm{rk} : K(M) \longrightarrow \mathbb{Z}$, и легко видеть, что $\mathrm{rk}([\xi]-[\eta]) = \mathrm{rk}\,\xi - \mathrm{rk}\,\eta$.

Рассмотрим теперь более сложный и полезный для нас пример. Как мы видели на прошлой лекции, характер Чженя обладает *свойством аддитивности:*

$$\mathrm{ch}(\xi \oplus \eta) = \mathrm{ch}\,\xi + \mathrm{ch}\,\eta.$$

Но это значит, что характер Чженя задаёт гомоморфизм моноидов

$$\mathrm{ch} : \mathrm{Vec}(M) \longrightarrow H^{2*}(M).$$

Тогда он даёт нам гомоморфизм

$$\mathrm{ch} : K(M) \longrightarrow H^{2*}(M),$$

и легко видеть, что $\mathrm{ch}([\xi]-[\eta]) = \mathrm{ch}\,\xi - \mathrm{ch}\,\eta$.

Конечно, нехорошо использовать одно и то же обозначения для отображения из $\mathrm{Vec}(M)$ и отображения из $K(M)$, но это удобно, а из контекста обычно ясно, о каком отображении идёт речь.

Для теоремы Атьи-Зингера нам понадобится иметь дело с $K$-теорией для касательного расслоения $TM$. Но $TM$ не является компактным многообразием. Поэтому хотя группа $K(TM)$ и характер Чженя

$$\mathrm{ch} : K(TM) \longrightarrow H^{2*}(TM)$$

определены, образ ch представляется, в общем-то, формой, которую потом нельзя проинтегрировать по $TM$. Но мы знаем, что формы с компактным носителем интегрировать можно. Поэтому хотелось бы иметь некие аналоги $K$-группы и характера Чженя, дающие форму с компактным носителем.

# 3 $K$-группа с компактным носителем

Пусть $M$ многообразие. Рассмотрим тройки $\xi = (\xi_1, \xi_2, a)$, состоящие из векторных расслоений $\xi_i$ с базой $M$ и изоморфизма $a : \xi_1|_{M\setminus K} \longrightarrow \xi_2|_{M\setminus K}$, где $K$ некое компактное подмножество $M$. Компактное множество $K$ называется *носителем* тройки $\xi$.

Для теоремы об индексе нам понадобятся гладкие расслоения, их мы и будем рассматривать. Заметим также, что можно полагать отображение $a$ определённым на всем $M$, но являющимся изоморфизмом только на $M \setminus K$. В самом деле, если у нас есть изоморфизм $a$ из первоначального определения, то его можно умножить на функцию $\rho \geqslant 1$, равную нулю на $K$

и равную 1 вне некоторого большего компакта $K' \supset K$. Тогда отображение $\rho a$ определено на всем $M$ и является изоморфизмом на $M \setminus K'$.

Ясно, что определённые выше тройки легко складывать:

$$(\xi_1, \xi_2, a) + (\eta_1, \eta_2, b) = (\xi_1 \oplus \eta_1, \xi_2 \oplus \eta_2, a \oplus b).$$

Если $a$ изоморфизм все компакта $K_1$, а $b$ вне $K_2$, то $a \oplus b$ будет изоморфизмом вне объединения $K_1 \cup K_2$, которое также компактно.

Будем называть две тройки $(\xi_1, \xi_2, a)$ и $(\eta_1, \eta_2, b)$ изоморфными, если существуют изоморфизмы $f_1 : \xi_1 \longrightarrow \eta_1$ и $f_2 : \xi_2 \longrightarrow \eta_2$ (изоморфизмы на всем $M$, а не только на $M \setminus K$!), такие что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \xi_1|_{M\setminus K} \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "a"'] & \eta_1|_{M\setminus K} \arrow[d, "b"] \\ \xi_2|_{M\setminus K} \arrow[r, "f_2"] & \eta_2|_{M\setminus K} \end{tikzcd}$$

коммутативна для некоторого компакта $K$, вне которого и $a$, и $b$ являются изоморфизмами.

Тройка $(\xi_1, \xi_2, a)$ будет называться тривиальной, если $a$ можно продолжить до изоморфизма на всем $M$.

Классы изоморфизма троек образуют абелев моноид $\Gamma(M)$. Введём на этом моноиде отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом: тройки $\xi = (\xi_1, \xi_2, a)$ и $\eta = (\eta_1, \eta_2, b)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют тривиальные тройки $\theta'$, $\theta''$, такие что $\xi + \theta'$ изоморфно $\eta + \theta''$.

Класс эквивалентности тройки $\xi = (\xi_1, \xi_2, a)$ относительно $\sim$ будем обозначать через $[\xi] = [\xi_1, \xi_2, a]$ и называть виртуальным расслоением с компактным носителем.

**Определение 3.1** *Фактормоноид* $\Gamma(M)/\sim$ *называется* $K$-группой с компактным носителем многообразия $M$ *и обозначается* $K_c(M)$.

Этот этот моноид и в самом деле является группой, что следует из следующих утверждений.

**Утверждение 3.2** *Пусть* $\xi(t) = (\xi_1, \xi_2, a(t))$ *гладкое семейство, зависящее от параметра* $t \in [0, 1]$, *причем носитель* $K$ *троек* $\xi(t)$ *не зависит от* $t$. *Тогда* $[\xi(0)] = [\xi(1)]$ *в* $K_c(M)$.

**Доказательство.** Докажем, что $\xi(0)$ и $\xi(t)$ изоморфны. Для этого нам надо построить изоморфизмы $f_1(t) : \xi_1 \longrightarrow \xi_1$ и $f_2(t) : \xi_2 \longrightarrow \xi_2$, такие что диаграмма

$$\begin{tikzcd} \xi_1|_{M\setminus K'} \arrow[r, "f_1(t)"] \arrow[d, "a(0)"'] & \xi_1|_{M\setminus K'} \arrow[d, "a(t)"] \\ \xi_2|_{M\setminus K'} \arrow[r, "f_2(t)"] & \xi_2|_{M\setminus K'} \end{tikzcd}$$

коммутативна для некоторого компакта $K' \supset K$.

Положим $f_2(t) \equiv \mathrm{id}$. Тогда на $M \setminus K'$ мы получаем

$$a(t) f_1(t) = a(0), \tag{2}$$

откуда $f_1(t) = a(t)^{-1}a(0)$. Однако это задаёт нам $f_1(t)$ только вне $K$, так как внутри $K$ отображения $a(t)$ не являются, вообще говоря, изоморфизмами, и $a(t)^{-1}$ не существует.

Чтобы преодолеть это препятствие, продифференцируем тождество (2) по $t$:

$$\dot{a}(t)f_1(t) + a(t)\dot{f}_1(t) = 0.$$

Откуда

$$\dot{f}_1(t) = -a(t)^{-1}\dot{a}(t)f_1(t). \tag{3}$$

У этого уравнения есть и очевидное начальное условие $f_1(0) = \mathrm{id}$.

Умножим теперь правую часть уравнения (3) на функцию $\rho \geqslant 1$, равную нулю на $K$ и равную 1 вне некоторого большего компакта $K' \supset K$ и получим задачу Коши на всем $M$

$$\begin{cases} \dot{f}_1(t) = -\rho a(t)^{-1}\dot{a}(t)f_1(t), \\ f_1(0) = \mathrm{id}. \end{cases}$$

Решение этой задачи Коши определено уже на всем $M$, а на $M \backslash K'$ совпадает с $a(t)^{-1}a(0)$ в силу единственности решения.

□

**Утверждение 3.3** *В $K_c(M)$ верно тождество*

$$[\xi_0, \xi_1, a] + [\xi_1, \xi_2, b] = [\xi_0, \xi_2, b \circ a]$$

*(логарифмическое свойство).*

**Доказательство.** Докажем, что $(\xi_0, \xi_1, a) + (\xi_1, \xi_2, b) \sim (\xi_0, \xi_2, b \circ a)$. По определению

$$(\xi_0, \xi_1, a) + (\xi_1, \xi_2, b) = (\xi_0 \oplus \xi_1, \xi_1 \oplus \xi_2, a \oplus b).$$

В силу изоморфизма векторных пространств, а значит, и расслоений $V \oplus W \simeq W \oplus V$ тройка $(\xi_0 \oplus \xi_1, \xi_1 \oplus \xi_2, a \oplus b)$ изоморфна тройке

$$(\xi_0 \oplus \xi_1, \xi_2 \oplus \xi_1, \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix}).$$

Заметим теперь, что отображение

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}$$

гомотопно отображению

$$\begin{pmatrix} b \circ a & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix},$$

можно рассмотреть, например, гомотопию

$$\begin{pmatrix} \sin t \cdot b & \cos t \cdot b \\ \cos t \cdot \mathrm{id} & -\sin t \cdot \mathrm{id} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix}.$$

Тогда в силу утверждения 3.2 тройка $(\xi_0 \oplus \xi_1, \xi_1 \oplus \xi_2, a \oplus b)$ изоморфна сумме тройки $(\xi_0, \xi_2, b \circ a)$ и тривиальной тройки $(\xi_1, \xi_1, \mathrm{id})$, откуда по определению отношения эквивалентности $\sim$ следует искомое утверждение.

□

**Утверждение 3.4** *В $K_c(M)$ верно тождество*

$$-[\xi_0, \xi_1, a] = [\xi_1, \xi_0, a^{-1}],$$

*то есть каждый элемент имеет обратный, и $K_c(M)$ является абелевой группой.*

**Доказательство** очевидным образом следует из утверждения 3.3
$\square$

# 4 Характер Чженя с компактным носителем

Теперь нам хотелось бы построить характер Чженя с компактным носителем $\mathrm{ch}_c : K_c(M) \longrightarrow H_c^{2*}(M)$, аналогичный характеру Чженя в «обычной» $K$-теории.

Рассмотрим тройку $\xi = (\xi_1, \xi_2, a)$. Снабдим оба расслоения эрмитовыми скалярными произведениями. Можно считать $a$ унитарным отображением, так как его можно продеформировать в унитарный, а класс тройки в $K_c(M)$ от этого не изменится.

Естественным желанием было бы взять эрмитовы связности $\nabla_i$ в расслоениях $\xi_i$, найти их кривизны $F_i$ и рассмотреть когомологический класс формы $\mathrm{tr}\, e^{\frac{F_1}{2\pi i}} - \mathrm{tr}\, e^{\frac{F_2}{2\pi i}}$. Но эта форма не будет, вообще говоря, иметь компактного носителя.

Чтобы всё получилось, надо рассматривать *согласованные связности* $\nabla_i$. Это такие связности, что $a\nabla_1 = \nabla_2 a$ вне компакта $K$.

Это требование можно сформулировать и другим образом. Задание связностей $\nabla_1$ и $\nabla_2$ на $\xi_1$ и $\xi_2$ даёт связность $\nabla$ на $\mathrm{Hom}(\xi_1, \xi_2)$ по правилу $(\nabla h)(s) = \nabla_2(hs) - h(\nabla_1 s)$, где $s \in \Gamma(\xi_1)$, $h \in \mathrm{Hom}(\xi_1, \xi_2)$. Тогда условие согласованности значит в точности то, что $\nabla a = 0$ вне $K$.

**Утверждение 4.1** *Если мы выбрали согласованные эрмитовы связности, то форма $\mathrm{tr}\, e^{\frac{F_1}{2\pi i}} - \mathrm{tr}\, e^{\frac{F_2}{2\pi i}}$ имеет компактный носитель, и её когомологический класс не зависит от выбора согласованных связностей.*

**Определение 4.2** *Этот когомологический класс называется характером Чженя с компактным носителем и обозначается $\mathrm{ch}_c[\xi]$.*

**Доказательство.** Вспомнив тот факт, что $F = \nabla^2$, мы получаем тождество

$$0 = \nabla(\nabla a)(s)) = \nabla(\nabla_2(as) - a(\nabla_1 s)) =$$

$$= \nabla_2(\nabla_2(as) - a(\nabla_1 s)) + \nabla_2(a\nabla_1 s) - a(\nabla_1\nabla_1 s) = (F_2 a - aF_1)s,$$

обратите внимание, что мы один раз меняли знак, меняя местами ковариантную производную и 1-формы (не забывайте, что $\nabla s$ является 1-формой со значениями в сечениях!).

Тогда $F_2 a = aF_1$ вне $K$, то есть $F_2 = aF_1 a^{-1}$ вне $K$, откуда следует, что $\mathrm{tr}\, e^{\frac{F_1}{2\pi i}} - \mathrm{tr}\, e^{\frac{F_2}{2\pi i}}$ вне $K$ равна нулю, поэтому $\mathrm{tr}\, e^{\frac{F_1}{2\pi i}} - \mathrm{tr}\, e^{\frac{F_2}{2\pi i}}$ определяет когомологический класс формы с компактным носителем.

Доказательство независимости от выбора эрмитовых структур и согласованный связностей аналогично обычному случаю и оставляется читателю в качестве упражнения. Отметим также, что надо ещё доказать, что $\mathrm{ch}_c(\xi)$ зависит только от класса эквивалентности $[\xi]$. Это тоже оставляется читателю.

По сути, надо доказать, что когомологический класс не меняется при деформации $a$ и $\nabla_i$ при условии, что $\nabla a = 0$, то есть когда $\nabla_i$ остаются согласованными связностями.

□

Заметим, что класс Чженя с компактным носителем является вещественным когомологическим классом, а не комплексным. Оставим это читателю в качестве упражнения.

Остаётся только вопрос о том, существуют ли вообще согласованные связности.

Пусть у нас есть некие две эрмитовы связности $\nabla_i$. Определим новую связность $\tilde{\nabla}_1$ в расслоении $\xi_1$ по формуле

$$\tilde{\nabla}_1 s = \nabla_1 s + (\rho a^{-1} \nabla a) s,$$

где $\rho$ уже встречавшаяся ранее функция. Легко проверить, что связности $\tilde{\nabla}_1$ и $\nabla_2$ будут согласованными вне $K' \supset K$, причем связность $\tilde{\nabla}_1$ будет эрмитовой.

# 5 Дифференциальные операторы в расслоениях и их символы

Пусть $M$ многообразие размерности $n$, а $\xi^0$ и $\xi^1$ два комплексных расслоения над $M$, пусть $\mathrm{rk}\,\xi^0 = m$, $\mathrm{rk}\,\xi^1 = l$.

Сейчас мы определим понятие дифференциального оператора. Сначала мы сделаем это с помощью координат, а позже заметим, как определять его инвариантным образом.

Покроем $M$ такими окрестностями $U_i$, которые одновременно являются тривиализующими для $\xi^0, \xi^1$, а также являются координатными окрестностями на $M$. Рассмотрим какую-нибудь одну такую окрестность $U_i$. Введём в ней координаты $x^1, \ldots, x^n$, а также введём базис сечений $e_1, \ldots, e_m$ в $\Gamma(U_i, \xi^0)$ и базис сечений $f_1, \ldots, f_l$ в $\Gamma(U_i, \xi^1)$.

Нам будет очень удобно ввести понятие мультииндекса. Пусть

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \quad \text{где } \alpha_i \in \mathbb{Z}_+.$$

Тогда положим $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, $0 = (0, \ldots, 0)$. Пусть по определению $\left(\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right)^0 = \mathrm{id}$. Тогда определим

$$D^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)^{\alpha_n}.$$

Рассмотрим теперь сечения $s = s^\alpha e_\alpha \in \Gamma(U_i, \xi^0)$ и $f = f^\beta e_\beta \in \Gamma(U_i, \xi^1)$, где мы, естественно, подразумеваем суммирование по $\alpha$ и $\beta$.

**Определение 5.1** *Отображение* $A : \Gamma(M, \xi^0) \longrightarrow \Gamma(M, \xi^1)$ *называется* дифференциальным оператором порядка $k$, *если локально в координатах* *сечения $s \in \Gamma(U_i, \xi^0)$ и $t = As \in \Gamma(U_i, \xi^1)$ связаны формулой*

$$\begin{pmatrix} t^1(x) \\ \vdots \\ t^l(x) \end{pmatrix} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} A_\alpha(x) D^\alpha \begin{pmatrix} s^1(x) \\ \vdots \\ s^m(x) \end{pmatrix},$$

*где $A_\alpha(x)$ являются $l \times m$-матрицами, зависящими от точки $x = (x^1, \ldots, x^n)$.*

Заметим теперь, что ковариантная производная $\nabla_X$ вдоль векторного поля $X$ является дифференциальным оператором первого порядка. Тогда легко заметить, что бескоординатно дифференциальные операторы порядка $k$ можно определить как элементы множества

$$\Gamma(M, \mathrm{Hom}(\xi^0, \xi^1)) \cdot \mathrm{span}(\{\nabla_{X_1} \ldots \nabla_{X_j} | j \leqslant k\}),$$

где $X_i$ произвольные векторные поля, а $\mathrm{span}(Z)$ обозначает линейную оболочку множества $Z$.

Обозначим пространство дифференциальных операторов из сечений $\xi^0$ в сечения $\xi^1$ через $\mathcal{D}_k(\xi^0, \xi^1)$. Пространство $\mathcal{D}(\xi^0, \xi^1) = \bigoplus_k \mathcal{D}_k(\xi^0, \xi^1)$ называется пространством дифференциальных операторов из сечений $\xi^0$ в сечения $\xi^1$. Иногда говорят просто «из $\xi^0$ в $\xi^1$».

С различных точек зрения очень важным оказывается понятие символа дифференциального оператора. Существует много разных определений, но все они, в конечном итоге, дают то же самое. Рассмотрим старшие производные в операторе $A$:

$$\sum_{|\alpha|=k} A_\alpha(x) D^\alpha.$$

Грубо говоря, при замене координат они «преобразуются как ковектор». Более точно, пусть $v \in T_x^* M$ ковектор в точке $x$. В координатах имеем $v = (v_1, \ldots, v_n)$. Введём мультииндексное обозначение

$$v^\alpha = (v_1)^{\alpha_1} \ldots (v_n)^{\alpha_n}.$$

Тогда мы можем рассмотреть выражение

$$\sigma_k(A)(x, v) = \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha(x) v^\alpha. \tag{4}$$

При замене координат на $M$ это выражение остаётся инвариантным. Давайте теперь опишем его в геометрических терминах.

У нас имеется кокасательное расслоение $\pi : T^* M \longrightarrow M$, а на $M$ имеются расслоения $\xi^i$. Тогда имеются и обратные образы $\pi^* \xi^i$,

$$\begin{tikzcd} \pi^*\xi^i \arrow[r] \arrow[d, "\pi^* p"'] & \xi^i \arrow[d, "p"] \\ T^*M \arrow[r, "\pi"] & M. \end{tikzcd}$$

Это будут расслоения над $T^* M$, такие что слой $(\pi^* \xi^i)_{(x,v)}$ над точкой $(x, v) \in T^* M$, где $v \in T_x^* M$, совпадает со слоем $\xi_x^i$.

Тогда видно, что $\sigma_k(A)$ является сечением расслоения $\mathrm{Hom}(\pi^*\xi^0, \pi^*\xi^1)$. В самом деле, каждой точке $(x, v)$ базы этого расслоения сопоставляется отображение $\sigma_k(A)(x, v)$ слоя $\xi^0_x = (\pi^*\xi^0)_{(x,v)}$ в слой $\xi^1_x = (\pi^*\xi^1)_{(x,v)}$.

Это наблюдение можно уточнить. Заметим, что по $v$ это однородный многочлен степени $k$. Тогда это значит, что $\sigma_k(A)$ является сечением расслоения $S^k(TM) \otimes \mathrm{Hom}(\xi^0, \xi^1)$, где $S^k(TM)$ — $k$-я симметрическая степень расслоения $TM$.

**Определение 5.2** *Задаваемое формулой (4) сечение $\sigma_k(A)$ расслоения*

$$S^k(TM) \otimes \mathrm{Hom}(\xi^0, \xi^1) \subset \mathrm{Hom}(\pi^*\xi^0, \pi^*\xi^1)$$

*называется* символом *дифференциального оператора*

$$A : \Gamma(M, \xi^0) \longrightarrow \Gamma(M, \xi^1)$$

*порядка $k$.*

Конечно, хотелось бы научиться находить символ оператора, и не прибегая к координатам.Пусть $g \in C^\infty(M)$ такая функция, что $g(x) = 0$, $dg_x = v$. Пусть $f \in \Gamma(M, \xi^0)$ такое сечение, что $f(x) = e \in \xi^0_x$. Тогда легко проверить, что действие символа в точке $(x, v)$ на элемент слоя $e \in \xi^0_x = (\pi^*\xi^0)_{(x,v)}$ задаётся формулой

$$\sigma_k(A)(x, v)e = A\left(\frac{1}{k!} g^k f\right)(x).$$

Так как это выражение в координатах совпадает с (4), а это легко проверить, то из этого следует, что от произвола в выборе $f$ и $g$ ничего не зависит. При желании можно было эту формулу взять за определение символа.

Итак, $\sigma_k(A)(x, v)$ является гомоморфизмом из $\xi^0_x = (\pi^*\xi^0)_{(x,v)}$ в $\xi^1_x = (\pi^*\xi^1)_{(x,v)}$. Естественно, что очень интересен случай, когда этот гомоморфизм будет изоморфизмом. Ясно, что при $v = 0$ этот гомоморфизм отправляет все в ноль, поэтому не может быть изоморфизмом, так что интересно смотреть только на $v \neq 0$.

**Определение 5.3** *Дифференциальный оператор $A$ порядка $k$ называется* эллиптическим, *если $\sigma_k(A)(x, v)$ является изоморфизмом при $v \neq 0$.*

Эллиптические операторы обладают многими интересными свойствами, в частности, они являются *фредгольмовыми,* то есть их ядро и коядро *конечномерны.* Этот факт требует значительной техники функционального анализа, и мы не будем его доказывать. Тем более, что в интересных нам примерах конечномерность ядра и коядра может быть установлена непосредственно.

Раз уж ядро и коядро конечномерны, то это позволяет нам определить понятие индекса эллиптического оператора.

**Определение 5.4** Индексом *эллиптического дифференциального оператора $A$ называется разность размерностей ядра и коядра*

$$\mathrm{index}\, A = \dim \mathrm{Ker}\, A - \dim \mathrm{Coker}\, A.$$

Совершенно замечательным является то, что индекс эллиптического дифференциального оператора в расслоениях над компактной базой может быть вычислен в топологических терминах! Это позволяет нам теорема Атьи-Зингера об индексе эллиптического оператора в расслоениях.

# 6 Формулировка теоремы Атьи-Зингера об индексе

В данном разделе мы будем сохранять все обозначения из предыдущего раздела. Мы потребуем дополнительно только того, чтобы многообразие $M$ было компактным.

У любого векторного расслоения есть нулевое сечение, сопоставляющее точке базы ноль в слое над этой точкой. Образ этого сечения (объединение нулей всех слоев) тоже часто называют нулевым сечением.

Ясно, что если база расслоения компактна, то и нулевое сечение компактно.

Если оператор $A$ эллиптический, то по определению эллиптичности его символ $\sigma_k(A)$ является изоморфизмом вне нулевого сечения. Но тогда он определяет тройку $(\pi^*\xi^0, \pi^*\xi^1, \sigma_k(A))$, дающую нам элемент $[\pi^*\xi^0, \pi^*\xi^1, \sigma_k(A)] \in K_c(T^*M)$. Напомним, что у нас с самого начала $\xi^i$ были комплексными расслоениями, поэтому речь идёт, конечно же, о комплексной $K$-группе с компактным носителем.

**Утверждение 6.1 (Теорема Атьи-Зингера об индексе)** *Индекс эллиптического оператора $A : \Gamma(M, \xi^0) \longrightarrow \Gamma(M, \xi^1)$ в расслоениях $\xi^i$ над компактной базой $M$ равен*

$$\operatorname{index} A = \int_{T^*M} \operatorname{ch}_c[\pi^*\xi^0, \pi^*\xi^1, \sigma_k(A)] \operatorname{Td}(M),$$

*где $\operatorname{Td}(M)$ класс Тодда многообразия $M$, то есть класс Тодда комплексификации его касательного расслоения $\mathcal{T}(TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$.*

В следующих лекциях мы увидим, что многие замечательные утверждения являются частными случаями теоремы Атьи-Зингера.

К сожалению, мы не сможем доказать теорему Атьи-Зингера. С одной стороны, это отняло бы столько времени, что мы не успели бы вообще ничего полезного, а с другой стороны, это требует значительной техники функционального анализа, которой многие слушатели курса не владеют. Поэтому кажется более разумным изучить следствия из этой теоремы. Это тем более полезно, что при этом нам понадобится сделать много практических вычислений с характеристическими классами.

# 7 Что читать?

Хорошее изложение $K$-теории можно найти в книге Каруби [1]. В этой книге нет $K$-теории с компактным носителем, но, посмотрев как там строится $K$-группа функтора, можно все сообразить.

Наше изложение $K$-теории с компактным носителем следует обзору [2], он посвящён теоремам об индексе, и $K$-теория там изложена именно нужным нам образом.

Сведения об дифференциальных операторах можно подчерпнуть в многочисленных книгах. Мы более-менее придерживаемся соглашений и обозначений из книги Пале [3].

Формулировку теоремы Атьи-Зингера можно найти во многих источниках, в том числе в [2] (к этому источнику мы особенно близки) и [3].

## Список литературы


[1] Каруби М., $K$-теория.

[2] Федосов Б. В., Теоремы об индексе, *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 65.* (Дифференциальные уравнения с частными производными-8). Стр. 165-268.

[3] Пале Р. Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе.