Дополнительные главы геометрии
Лекция 4
НМУ, осень 2005

А. В. Пенской

Аннотация

Цель лекций 4 и 5 — применить теорему Атьи-Зингера к оператору $d + d^*$, и получить теорему Гаусса-Бонне. В лекции 4 мы находим символ и аналитический индекс оператора $d + d^*$, а также рассказываем необходимые для этого понятия и утверждения.

1 Оператор внешнего дифференцирования форм

Пусть M гладкое компактное многообразие размерности n. Рассмотрим комплексификацию кокасательного расслоения $T^*M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Сечения внешней алгебры этого расслоения $\xi = \Lambda^* T^* M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ являются комплекснозначными дифференциальными формами на M. Рассмотрим оператор внешнего дифференцирования форм $d : \Gamma(M, \xi) \longrightarrow \Gamma(M, \xi)$. Это дифференциальный оператор первого порядка. В общем-то, это очевидным образом следует из явных формул для внешнего дифференциала в координатах. Мы не будем поэтому доказывать это в общем случае, а рассмотрим просто случай $d : \Gamma(\Lambda^1 T^* \mathbb{R}^3) \longrightarrow \Gamma(\Lambda^2 T^* \mathbb{R}^3)$ чтобы проиллюстрировать наши рассмотрения на примере.

Возьмём в качестве базиса в $\Gamma(\Lambda^1 T^* \mathbb{R}^3)$ 1-формы dx^1, dx^2 и dx^3, а в качестве базиса в $\Gamma(\Lambda^2 T^* \mathbb{R}^3)$ 2-формы $dx^1 \wedge dx^2$, $dx^2 \wedge dx^3$ и $dx^1 \wedge dx^3$. Тогда явная формула для внешнего дифференциала 1-формы

$$d(f_1 dx^1 + f_2 dx^2 + f_3 dx^3) = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2 +$$

$$+ \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x^3}\right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^3$$

значит, что в этих базисах оператор d записывается так: если

$$t_1 dx^1 \wedge dx^2 + t_2 dx^2 \wedge dx^3 + t_3 dx^1 \wedge dx^3 = d(f_1 dx^1 + f_2 dx^2 + f_3 dx^3),$$

то

$$\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^2} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^3} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

Из этого явного вида немедленно следует, что это дифференциальный оператор первого порядка. Первая квадратная матрица в этом равенстве есть $A_{(1,0,0)}$, вторая $A_{(0,1,0)}$, а третья $A_{(0,0,1)}$ из стандартной записи $d = \sum_{|\alpha|\leqslant 1} A_\alpha(x)D^\alpha$. Матрица $A_{(0,0,0)}$ в данном случае нулевая. Заметим, что эти матрицы для произвольного оператора в произвольных координатах и произвольных базисах в сечениях вовсе не постоянны.

2 Символ оператора внешнего дифференцирования форм.

Как мы уже видели, символ можно считать разными способами, рассмотрим не зависящую от координат формулу из прошлой лекции.

Пусть x точка на M, а v ковектор в точке x, то есть $v \in T^*_x M$. Как уже говорилось в прошлой лекции, символ $\sigma_k(A)(v,x)$ оператора A порядка k в точке $(v,x) \in T^*M$ отображает ξ^0_x в ξ^1_x и может быть вычислен следующим образом.

Пусть $e \in \xi^0_x$ вектор в ξ^0 над точкой x. Выберем сечение $f \in \Gamma(U,\xi^0)$ расслоения ξ^0 над некоторой окрестностью U точки x, такое что $f(x) = e$. Выберем гладкую функцию $g \in C^\infty(M)$, такую что $g(x) = 0$ и $dg_x = v$. Тогда

$$\sigma_k(A)(v,x)e = A\left(\frac{1}{k!}g^k f\right)(x).$$

Заметим, что вывести из этой «бескоординатной» формулы «координатную» очень просто. В самом деле, рассмотрим координатную окрестность U точки x с координатами y^i, такими что точка x имеет координаты $(0,\dots,0)$. Пусть v в базисе dy^i пространства $T^*_x M$ имеет вид $v = v_i dy^i$. Положим $f \equiv e$, то есть f постоянное сечение, $g(y) = v_1 y^1 + \dots + v_n y^n$. Тогда

$$\sigma_k(A)(v,x)e = \left[\sum_{|\alpha|\leqslant k} A_\alpha D^\alpha\left(\frac{1}{k!}g^k\right)f\right](x).$$

Заметим, что из того, что $g(x) = 0$ следует, что

$$(D^\alpha g^k)(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } |\alpha| < k, \\ k!v^\alpha & \text{при } |\alpha| = k. \end{cases}$$

Так как $f \equiv e$ постоянное сечение, то мы получаем

$$\sigma_k(A)(v,x)e = \sum_{|\alpha|=k} A_\alpha(x)v^\alpha e = \sum_{|\alpha|=k} v^\alpha A_\alpha(x)e,$$

что и требовалось доказать.

На самом деле, в наших рассмотрениях гораздо удобнее пользоваться «бескоординатной» формулой. Рассмотрим случай $A = d$. Как мы уже говорили выше, это дифференциальный оператор первого порядка в расслоении ξ, сечениями которого являются дифференциальные формы. Мы рассматриваем комплекснозначные формы, но в настоящее время это не важно. Итак, у нас f является сечением расслоения, то есть дифференциальной формой. Тогда получаем

$$d(gf)(x) = [dg \wedge f + gdf](x) = dg_x \wedge f(x) = v \wedge f(x),$$

так как $g(x) = 0$ и $dg_x = v$. Это значит, что $\sigma_1(d)(v,x) = v \wedge \cdot$, то есть символ d есть просто оператор (линейный, а не дифференциальный) внешнего умножения на v. Обозначение $v \wedge \cdot$ неудобное, обозначим этот оператор через ε_v, то есть $\varepsilon_v e = v \wedge e$.

Напомним, что дифференциальный оператор A порядка k называется эллиптическим, если при $v \neq 0$ его символ является обратимым оператором. Рассмотрим случай, когда $v = dy^1$, $f \equiv e = dy^1$. Тогда $\varepsilon_v(e) = v \wedge e = 0$, то есть символ необратим, и оператор d не является эллиптическим.

Многие естественные геометрические операторы не являются эллиптическими. Читатель может исследовать вопрос, когда оператор производной Ли L_X является эллиптическим, и увидеть, он эллиптичен только в некоторых вырожденных случаях.

Как мы уже видели, теорема Атьи-Зингера верна для эллиптических операторов, а потому не применима к d. Что же делать? Оказывается, оператор $d + d^*$ эллиптичен, но чтобы определить d^*, надо поговорить о формально сопряжённых операторах.

3 Формально сопряжённые операторы

Пусть ξ^0 и ξ^1 эрмитовы векторные расслоения над римановым компактным многообразием M. Обозначим метрики в расслоениях ξ^i через $(\,,)_{\xi^i}$. Эти скалярные произведения дают нам скалярные произведения $<,>_{\xi^i}$ в пространствах сечений $\Gamma(M, \xi^i)$ по формуле

$$< s_1, s_2 >_{\xi^i} = \int_M (s_1(x), s_2(x))_{\xi^i} \omega, \quad s_1, s_2 \in \Gamma(M, \xi^i),$$

где ω форма объёма на римановом многообразии M. Пусть

$$A : \Gamma(M, \xi^0) \longrightarrow \Gamma(M, \xi^1)$$

дифференциальный оператор порядка k.

Определение 3.1 *Дифференциальный оператор*

$$A^* : \Gamma(M, \xi^1) \longrightarrow \Gamma(M, \xi^0)$$

порядка k называется формально[1] сопряжённым *к оператору A, если для любых сечений $s_0 \in \Gamma(M, \xi^0)$ и $s_1 \in \Gamma(M, \xi^1)$ верно тождество*

$$< As_0, s_1 >_{\xi^1} = < s_0, A^* s_1 >_{\xi^0}.$$

Так как у нас будут встречаться только формально сопряжённые операторы, то слово «формально» мы часто будем опускать.

[1] Мы говорим «формально», так как не входим в тонкости функционального анализа, проистекающие из того, что оператор неограничен, а пространство гладких сечений неполно.

Утверждение 3.2 *Если формально сопряжённый оператор существует, то он единственный.*

Доказательство. Пусть A_1^* и A_2^* два формально сопряжённых к A оператора. Тогда для любых сечений $s_0 \in \Gamma(M, \xi^0)$ и $s_1 \in \Gamma(M, \xi^1)$ верно тождество

$$< s_0, (A_1^* - A_2^*)s_1 >_{\xi^0} = < (A - A)s_0, s_1 >_{\xi^1} = 0,$$

откуда следует, что $A_1^* - A_2^* = 0$. $\square$

Сопряжённый оператор A^* всегда существует, но доказательство этого не очень короткое: надо склеить из сопряжённых операторов в картах, но $\mathbb{R}^n$ не является компактным, поэтому там определение формально сопряжённого оператора несколько труднее, да и надо аккуратно проверять, что эту склейку можно сделать. Мы не будем этого делать, так как в наших рассмотрениях сопряжённый оператор всегда будет предъявляться явно.

4 Оператор $*$

Чтобы явно построить оператор d^* нам надо сначала построить оператор $*$.

Пусть V ориентированное вещественное векторное пространство размерности n, снабжённое евклидовым скалярным произведением $<,>$. Это скалярное произведение индуцирует скалярные произведения во всех внешних степенях $\Lambda^k(V)$ следующим образом: на разложимых элементах оно определено по правилу

$$< e_1 \wedge \cdots \wedge e_k, f_1 \wedge \cdots \wedge f_k > = \det | < e_i, f_j > |,$$

где в правой части стоит детерминант матрицы из попарных скалярных произведений, а на неразложимые элементы продолжаем по билинейности.

Определим отображение $\det : \Lambda^n(V) \cong \mathbb{R}^n$ следующим образом: если $e_1, \ldots, e_n$ ортонормированный положительно ориентированный базис, то $\det(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = 1$, а далее продлим $\det$ по линейности.

Определение 4.1 *Оператор* $* : \Lambda^k(V) \longrightarrow \Lambda^{n-k}(V)$ *определяется из тождества*

$$< a, b > = \det(a \wedge *b)$$

верного для любых $a, b \in \Lambda^k(V)$.

Легко видеть, что это линейный оператор, зависящий от выбора метрики и ориентации. Заметим также, что $*(e_1 \wedge \cdots \wedge e_k) = e_{k+1} \wedge \cdots \wedge e_n$.

Утверждение 4.2 *Верно тождество*

$$*^2 = (-1)^{k(n-k)} \quad \text{на } \Lambda^k(V),$$

где $n = \dim V$.

В частности, если $\dim V = 2l$, *то*

$$*^2 = (-1)^k \quad \text{на } \Lambda^k(V).$$

Доказательство этого чисто алгебраического тождества оставляется читателю в качестве упражнения.

□

Пусть M ориентированное риманово многообразие размерности n. Риманова метрика является метрикой на касательном расслоении TM. Поднимая индексы у метрического тензора, мы получаем метрику на кокасательном расслоении T^*M.

Мы описали выше, как метрику с векторного пространства V можно продлить на внешние степени $\Lambda^k(V)$, и построить оператор $*$.

Ясно, что делая такую операцию послойно, мы получаем, начиная с метрики на T^*M, метрики на расслоениях $\Lambda^k(T^*M)$ и послойный оператор $*$.

Рассмотрим расслоения комплекснозначных k-форм $\xi^k = \Lambda^k(T^*M)\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$. Комплексифицируя оператор $*$, мы получаем изоморфизм расслоений

$$* : \xi^k \cong \xi^{n-k}$$

и линейный оператор в сечениях

$$* : \Gamma(\xi^k) \cong \Gamma(\xi^{n-k}).$$

Евклидову метрику на вещественном векторном пространстве V можно продолжить до эрмитовой метрики на его комплексификации $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. В нашем случае это означает, что мы получаем эрмитову метрику на расслоениях $\xi^k = \Lambda^k(T^*M) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, а значит и эрмитово скалярное произведение $(,)$ на пространствах сечений $\Gamma(\xi^k)$, то есть на пространствах комплекснозначных k-форм.

В результате мы видим, что верно следующее утверждение.

Утверждение 4.3 *Пусть M ориентированное компактное риманово многообразие размерности n. Тогда существует линейный оператор*

$$* : \Gamma(\xi^k) \cong \Gamma(\xi^{n-k}),$$

обладающий следующими свойствами:

1. *$(\alpha,\beta) = \int_M \alpha \wedge *\bar{\beta}$, где α,β являются k-формами, а $(,)$ является эрмитовым произведением в пространстве комплекснозначных k-форм, то есть в пространстве $\Gamma(\xi^k)$.*

2. *$*^2 = (-1)^k$ на $\Gamma(\xi^k)$, если M чётномерно.*

3. *$*\bar{\beta} = \overline{*\beta}$, то есть оператор $*$ вещественный.*

5 Оператор, формально сопряжённый к d

Пусть многообразие M чётномерно.

Утверждение 5.1 *Оператор $\delta = - * d* : \Gamma(\xi^{k+1}) \longrightarrow \Gamma(\xi^k)$ является формально сопряжённым к оператору $d : \Gamma(\xi^k) \longrightarrow \Gamma(\xi^{k+1})$.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in \Gamma(\xi^k)$ комплекснозначная k-форма, а $\beta \in \Gamma(\xi^{k+1})$ комплекснозначная $k+1$-форма. Тогда

$$(\alpha, \delta\beta) = (\alpha, - * d * \beta) = -\int_M \alpha \wedge \overline{**d*\beta} = -(-1)^k \int_M \alpha \wedge d * \bar{\beta}.$$

Заметим, что $d(\alpha \wedge * \bar{\beta}) = d\alpha \wedge * \bar{\beta} + (-1)^k \alpha \wedge d * \bar{\beta}$, поэтому по теореме Стокса получаем

$$\int_M d\alpha \wedge * \bar{\beta} = (d\alpha, \beta),$$

что и требовалось доказать.

□

6 Символ оператора $d + \delta$

Оператор d отображает k-формы в $k+1$-формы, а δ отображает $k+1$-формы в k-формы. Рассмотрим прямую сумму расслоений $\xi = \bigoplus_{i=0}^{n} \xi^i$, где $n = 2p = \dim M$. Можно рассмотреть оператор $d + \delta : \Gamma(\xi) \longrightarrow \Gamma(\xi)$. Оператор $d + \delta$ является самосопряжённым.

Введём расслоения $\xi^{odd} = \bigoplus_{i=0}^{p-1} \xi^{2i+1}$ и $\xi^{even} = \bigoplus_{i=0}^{p} \xi^{2i}$. Ясно, что $d + \delta$ переводит $\Gamma(\xi^{even})$ в $\Gamma(\xi^{odd})$. Оказывается, что для изучения этого оператора полезно рассмотреть его квадрат

$$\Delta = (d + \delta)^2 = d\delta + \delta d,$$

называемый оператором Лапласа. Оператор Лапласа сохраняет степень дифференциальных форм, то есть переводит $\Gamma(\xi^k)$ в $\Gamma(\xi^k)$.

Мы уже знаем, что $\sigma_1(d)(v, x) = \varepsilon_v$. Как найти $\sigma_1(d + \delta)(v, x)$? Линейность символа очевидна, поэтому $\sigma_1(d + \delta)(v, x) = \sigma_1(d)(v, x) + \sigma_1(\delta)(v, x)$.

Далее мы воспользуемся следующим утверждением.

Утверждение 6.1 *Если A дифференциальный оператор порядка k, то*

$$\sigma_k(A^*) = (-1)^k (\sigma_k(A))^*,$$

где в правой части $*$ обозначает сопряжение линейного оператора.

Доказательство мы приводить не будем, а отошлём читателя к книге Пале [1]. Оно идейно несложно, надо с помощью разбиения единицы свести все к операторам на открытых областях, диффеоморфных $\mathbb{R}^n$, а там проделать явное вычисление, учитывая то, что $\mathbb{R}^n$ некомпактно, и определение сопряжённого оператора сложнее. Но если всё делать аккуратно, то это поглотит всё наше время, поэтому лучше не пытаться приводить его здесь.

Рассмотрим снова пространства $\Lambda^k(V)$. Определим операцию контракции i_v, где $v \in V$, на разложимых поливекторах равенством

$$i_v(e_1 \wedge \cdots \wedge e_k) = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} (v, e_j) e_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{e_j} \wedge \cdots \wedge e_k,$$

а далее продолжим по линейности. Рассматривая базисные векторы, легко доказать алгебраическое тождество $(v \wedge e, e') = (e, i_v e')$, откуда легко доказать, что $(\varepsilon_v)^* = i_v$. Тогда мы получаем следующее утверждение.

Утверждение 6.2 *Символ оператора $d + \delta$ даётся формулой*

$$\sigma_1(d+\delta)(v,x) = \varepsilon_v - i_v.$$

Чтобы доказать, что оператор $d+\delta$ эллиптический, полезно рассмотреть оператор Лапласа $\Delta = (d+\delta)^2$. Но предварительно надо доказать следующее утверждение.

Утверждение 6.3 *Пусть D_1 дифференциальный оператор порядка k, а D_2 дифференциальный оператор порядка l, тогда*

$$\sigma_{k+l}(D_1 D_2) = \sigma_k(D_1)\sigma_l(D_2).$$

Доказательство следует из «координатной» формулы для символа и формулы Лейбница с мультииндексами

$$D^\beta(fg) = \sum_{\lambda \leqslant \beta} \binom{\beta}{\lambda} (D^{\beta-\lambda} f)(D^\lambda g),$$

но нам это утверждение нужно только при $k = l = 1$, для этого случая мы его и докажем, а общий случай читатель найдёт в книге Пале [1].

Пусть $D_1 = A_0(x) + \sum_i A_i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$, $D_2 = B_0(x) + \sum_j B_j(x)\frac{\partial}{\partial x^j}$. Тогда

$$D_1 D_2 = \sum_{i,j} A_i(x) B_j(x) \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j} + \text{члены без производных второго порядка},$$

откуда

$$\sigma_2(D_1 D_2) = \sum_{i,j} v^i v^j A_i(x) B_j(x) =$$

$$= \left(\sum_i v^i A_i(x)\right)\left(\sum_j v^j B_j(x)\right) = \sigma_1(D_1)\sigma_1(D_2).$$

□

Это утверждение позволяет нам найти символ оператора Лапласа.

Утверждение 6.4 $\sigma_2(\Delta)(v,x) = -||v||^2$.

Доказательство.

$$\sigma_2(\Delta) = \sigma_2((d+\delta)^2) = (\sigma_1(d+\delta))^2 = (\varepsilon_v - i_v)^2 = -(\varepsilon_v i_v + i_v \varepsilon_v).$$

Легко доказать алгебраическое тождество

$$(\varepsilon_v i_v + i_v \varepsilon_v)e = v \wedge i_v e + i_v v \wedge e = ||v||^2 e,$$

можно, например, рассмотреть такой базис, что $v = ||v|| e_1$, и рассмотреть в качестве e произведение базисных векторов $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$. Из этого алгебраического тождества следует, что $\sigma_2(\Delta)(v,x)$ является оператором умножения на число $-||v||^2$, что и требовалось доказать.

□

Из этого утверждения немедленно следует следующее.

Утверждение 6.5 *Оператор $d+\delta$ является эллиптическим.*

Доказательство. Очевидно, что оператор Δ является эллиптическим, так как его символ обратим при $v \neq 0$: обратным к нему оператором будет умножение на $-\frac{1}{||v||^2}$.

Так как $(\sigma_1(d+\delta))^2 = \sigma_2(\Delta)$ обратим при $v \neq 0$, то и $\sigma_1(d+\delta)$ обратим при $v \neq 0$, что и требовалось доказать.

□

7 Индекс оператора $d+\delta$

Как мы видели, оператор $d+\delta$ является эллиптическим, а потому к нему применима теорема Атьи-Зингера. Вычислим индекс $d+\delta$.

Как уже говорилось в прошлой лекции, эллиптические операторы являются фредгольмовыми, то есть их ядро и коядро конечномерны, что мы для нашего оператора увидим непосредственно.

Напомним о следующем утверждении из функционального анализа.

Утверждение 7.1 *Если $A : V_1 \longrightarrow V_2$ фредгольмов, то $A^* : V_2^* \longrightarrow V_1^*$ тоже фредгольмов, и $\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Coker} A)^*$ и $\operatorname{Coker} A^* = (\operatorname{Ker} A)^*$.*

Доказательство полностью можно найти в книгах по функциональному анализу, его идея проста: надо рассмотреть точную последовательность

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} A \xrightarrow{i} V_1 \xrightarrow{A} V_2 \xrightarrow{p} \operatorname{Coker} A \longrightarrow 0,$$

и перейти к сопряжённой последовательности

$$0 \longleftarrow (\operatorname{Ker} A)^* \xleftarrow{i^*} V_1^* \xleftarrow{A^*} V_2^* \xleftarrow{p^*} (\operatorname{Coker} A)^* \longleftarrow 0,$$

откуда всё следует.

□

Найдём теперь индекс оператора $d+\delta : \Gamma(\xi^{even}) \longrightarrow \Gamma(\xi^{odd})$. По определению имеем

$$\operatorname{index}(d+\delta)|_{\xi^{even}} = \dim \operatorname{Ker}(d+\delta)|_{\xi^{even}} - \dim \operatorname{Coker}(d+\delta)|_{\xi^{even}},$$

в силу утверждения 7.1 это равно

$$\dim \operatorname{Ker}(d+\delta)|_{\xi^{even}} - \dim \operatorname{Ker}(d+\delta)^*|_{\xi^{odd}},$$

а это очевидным образом равно

$$\dim \operatorname{Ker}(d+\delta)|_{\xi^{even}} - \dim \operatorname{Ker}(d+\delta)|_{\xi^{odd}}.$$

Чтобы преобразовать это выражение дальше нужно следующее утверждение.

Утверждение 7.2 $(d+\delta)\varphi = 0 \Longleftrightarrow \Delta\varphi = 0$.

Доказательство. Если $(d+\delta)\varphi = 0$, то $\Delta\varphi = (d+\delta)(d+\delta)\varphi = 0$.

Если $\Delta\varphi = 0$, то

$$||(d+\delta)\varphi||^2 = \int_M ((d+\delta)\varphi, (d+\delta)\varphi) = \int_M (\varphi, (d+\delta)^*(d+\delta)\varphi) = \int_M (\varphi, \Delta\varphi) = 0,$$

откуда $(d+\delta)\varphi = 0$.

□

Из этого следует, что ядра операторов $d+\delta$ и Δ совпадают, поэтому мы получаем

$$\mathrm{index}(d+\delta)|_{\xi^{even}} = \dim \mathrm{Ker}\, \Delta|_{\xi^{even}} - \dim \mathrm{Ker}\, \Delta|_{\xi^{odd}}.$$

Определение 7.3 *Дифференциальная форма φ, такая что $\Delta\varphi = 0$, называется гармонической формой.*

Утверждение 7.4 *Пусть φ гармоническая k-форма. Тогда она замкнута.*

Доказательство. В силу утверждения 7.2 получаем $(d+\delta)\varphi = 0$. Так как $d\varphi$ степени $k+1$, а $\delta\varphi$ степени $k-1$, то они равны нулю по отдельности, то есть $d\varphi = \delta\varphi = 0$, что и требовалось доказать.

□

Так как гармоническая форма замкнута, то она определяет когомологический класс. Следующая теорема, которую мы обсудим в одной из последующих лекций, описывает связь между гармоническими формами и когомологическими классами.

Утверждение 7.5 (Теорема Ходжа) *В каждом когомологическом классе $H^*(M, \mathbb{C})$ есть единственный гармонический представитель, то есть*

$$H^k(M, \mathbb{C}) \cong \mathrm{Ker}\, \Delta|_{\xi^k}.$$

Из этого следует, что индекс равен сумме размерностей чётномерных когомологий минус сумма размерностей нечётномерных когомологий, то есть индекс равен эйлеровой характеристике

$$\mathrm{index}(d+\delta)|_{\xi^{even}} = \chi(M).$$

Таким образом, теорема Атьи-Зингера для оператора $(d+\delta)|_{\xi^{even}}$ даст нам описание эйлеровой характеристики в виде интеграла от некоторой величины. Мы увидим это в следующей лекции.

8 Что читать?

Наше изложение в данной лекции близко к книге Пале [1]. Очень краткое изложение можно найти и в обзоре [2].

Список литературы

[1] Пале Р. Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе.

[2] Федосов Б. В., Теоремы об индексе, *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 65.* (Дифференциальные уравнения с частными производными-8). Стр. 165-268.