Дополнительные главы геометрии
Лекция 5
НМУ, осень 2005

А. В. Пенской

Аннотация

Цель лекций 4 и 5 — применить теорему Атьи-Зингера к оператору $d + d^*$, и получить теорему Гаусса-Бонне. В лекции 5 мы находим топологический индекс оператора $d + d^*$ и выводим теорему Гаусса-Бонне.

1 Топологический индекс оператора $d + d^*$

Пусть M гладкое чётномерное компактное риманово многообразие размерности $n = 2p$. Мы рассматриваем оператор $A = d + d^* : \Gamma(\xi^{even}) \longrightarrow \Gamma(\xi^{odd})$. В прошлой лекции мы уже доказали, что $d^* = \delta = - * d*$, и нашли символ

$$\sigma_1(A)(v, x) = \varepsilon_v - i_v$$

и индекс

$$\operatorname{index} A = \chi(M)$$

оператора A.

Наша цель в данной лекции — понять, что теорема Атьи-Зингера

$$\operatorname{index} A = \int\limits_{T^*M} \operatorname{ch}_c \sigma_A \operatorname{Td}(M)$$

даёт для нашего оператора A. Левую часть (называемую иногда аналитическим индексом A) мы уже нашли, это эйлерова характеристика $\chi(M)$, теперь найдём правую часть (называемую иногда топологическим индексом оператора A).

Рассмотрим касательное расслоение $\tau_M = (TM \longrightarrow M)$, и введём в нём согласованную с метрикой связность ∇. Пусть F её кривизна, а y_i, $i = 1, \dots, p$ её образующие У.

2 Класс Тодда многообразия M

Начнём с класса Тодда $\operatorname{Td}(M)$. Напомним, что $\operatorname{Td}(M) = \mathcal{T}(\tau_M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$. Евклидову метрику и согласованную с ней связность на τ_M продлим до эрмитовой метрики и согласованной с ней связности на $\tau_M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Соответствующая форма кривизны будет просто комплексификацией F, и соответствующие образующие У x_j, $j = 1, \dots, n = 2p$ будут равны просто $\pm y_i$. По определению класс Тодда комплексного расслоения η равен

$$\mathcal{T}(\eta) = \det \frac{F/2\pi i}{1 - e^{-F/2\pi i}} = \prod_j \frac{x_j}{1 - e^{-x_j}},$$

поэтому

$$\mathrm{Td}(M) = \mathcal{T}(\tau_M \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) = \prod_{j=1}^{2p} \frac{x_j}{1 - e^{-x_j}} =$$

$$= \prod_{i=1}^{p} \frac{y_i}{1 - e^{-y_i}} \prod_{i=1}^{p} \frac{-y_i}{1 - e^{y_i}}.$$

3 Характер Чженя с компактным носителем символа оператора

Найдём теперь $\mathrm{ch}_c\, \sigma_A$. Как мы знаем, по связности на расслоении можно построить связность на двойственном расслоении. Таким образом, начиная с метрики и согласованной с ней связности на касательном расслоении τ_M, мы получим метрику и связность ∇^* на кокасательном расслоении τ_M^*. Читатель легко проверит в качестве полезного упражнения, что полученная связность будет согласована с полученной метрикой, а образующие У для кривизны полученной связности будут равны $y_i^* = -y_i$.

Евклидову метрику и согласованную с ней связность на τ_M^* продлим до эрмитовой метрики и согласованной с ней связности на $\tau_M^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Чтобы двигаться дальше, докажем следующее вспомогательное утверждение.

Утверждение 3.1 *Пусть ξ некоторое комплексное векторное расслоение ранга k со связностью ∇, образующие У кривизны которой равны x_i, $i = 1, \dots, k$. Пусть $\Lambda^{even}(\xi) = \bigoplus_i \Lambda^{2i}\xi$, $\Lambda^{odd}(\xi) = \bigoplus_i \Lambda^{2i+1}\xi$. Тогда*

$$\mathrm{ch}\, \Lambda^{even}(\xi) - \mathrm{ch}\, \Lambda^{odd}(\xi) = \prod_i (1 - e^{x_i}).$$

Доказательство. Продолжим связность ∇ с расслоения ξ на все его внешние степени $\Lambda^k(\xi)$ стандартным образом:

$$\nabla(s_1 \wedge \dots \wedge s_k) = \nabla(s_1) \wedge s_2 \wedge \dots \wedge s_k + s_1 \wedge \nabla(s_2) \wedge \dots \wedge s_k + \dots .$$

Тогда кривизна у продолжения связности будет такая:

$$F(s_1 \wedge \dots \wedge s_k) = F(s_1) \wedge s_2 \wedge \dots \wedge s_k + s_1 \wedge F(s_2) \wedge \dots \wedge s_k + \dots .$$

Если A оператор в векторном пространстве V с собственными векторами ω_i и собственными значениями x_i, то оператор $A \wedge \mathrm{id} \wedge \dots \wedge \mathrm{id} + \mathrm{id} \wedge A \wedge \mathrm{id} \wedge \dots \wedge \mathrm{id} + \dots$ в пространстве $\Lambda^k(V)$ имеет собственные векторы $\omega_{i_1} \wedge \dots \wedge \omega_{i_k}$, $i_1 < \dots < i_k$, с собственными числами $x_{i_1} + \dots + x_{i_k}$.

Это значит, что образующие У для расслоения $\Lambda^k(\xi)$ будут $x_{i_1} + \dots + x_{i_k}$, $i_1 < \dots < i_k$.

Тогда

$$\operatorname{ch}\Lambda^{even}(\xi) - \operatorname{ch}\Lambda^{odd}(\xi) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \operatorname{ch}\Lambda^j(\xi) =$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^{k} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_j \leqslant k} (-1)^j e^{x_{i_1} + \dots + x_{i_j}} = \prod_{i=1}^{n}(1 - e^{x_i}),$$

где мы учли то, что $\Lambda^0(\xi)$ одномерное тривиальное расслоение, и $\operatorname{ch}\Lambda^0(\xi) = 1$.

□

Итак, у нас есть расслоения ξ^{even} и ξ^{odd} со связностями, индуцированными из связности ∇^* на $\tau_M^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Злоупотребляя нотацией, мы будем обозначать эту связность тоже через ∇^*. Дальше мы рассматриваем расслоения $\pi^*\xi^{even}$ и $\pi^*\xi^{odd}$ над T^*M, где $\pi : T^*M \longrightarrow M$ естественная проекция в кокасательном расслоении $\tau_M^* = (T^*M \longrightarrow M)$. В этих расслоениях из связностей ∇^* на ξ^{even} и ξ^{odd} индуцируются связности, которые мы также обозначим через ∇^*.

Для формулы Атьи-Зингера нам надо найти характер Чженя с компактным носителем символа оператора, или, более точно, характер Чженя с компактным носителем тройки $\sigma_A = [\pi^*\xi^{even}, \pi^*\xi^{odd}, \sigma_1(d+\delta)]$.

Так как

$$\operatorname{ch}_c[\pi^*\xi^{even}, \pi^*\xi^{odd}, \sigma_1(d+\delta)] = \operatorname{ch}\pi^*\xi^{even} - \operatorname{ch}\pi^*\xi^{odd}, \tag{1}$$

то хотелось бы воспользоваться утверждением 3.1, но напомним, что в формуле (1) в правой части надо брать *согласованные с изоморфизмом* $\sigma_1(d+\delta)$ *связности!*

4 Построение согласованных связностей

Мы уже видели в одной из предыдущих лекций, что построить согласованные с изоморфизмом $\sigma_1(d+\delta)$ связности можно относительно просто, подправив одну из имеющихся связностей. Но сейчас мы проделаем более сложную конструкцию согласованной с изоморфизмом $\sigma_1(d+\delta)$ связности: мы увидим позже, что кроме согласованности она обладает другими хорошими свойствами.

Мы начали со связности ∇ в касательном расслоении τ_M, которая была согласована с метрикой.

По этой связности и метрике мы построили метрику $<,>$ и согласованную с ней связность ∇^* на кокасательном расслоении τ_M^*.

Они индуцировали метрику $<,>$ и согласованную с ней связность, которую мы также обозначим через ∇^*, на обратном образе кокасательного расслоения $\pi^*\tau_M^*$. Подправим эту связность.

У расслоения $\pi^*\tau_M^*$ над точкой $(x,v) \in T^*M$, где $x \in M$, а $v \in T_x^*M$, висит слой $(\pi^*\tau_M^*)_{(x,v)} \cong T_x^*M$. Таким образом, сечение расслоения $\pi^*\tau_M^*$ сопоставляет точке (x,v) некоторый ковектор над x. При $v \neq 0$ имеется глобально определённое сечение $\nu(v,x) = \dfrac{v}{|v|}$, где длина вектора меряется относительно метрики $<,>$.

Построим связность $\tilde{\nabla}^*$, такую что $\tilde{\nabla}^*\nu = 0$ при $|v| \geqslant 1$. Пусть $f(|v|)$ такая гладкая функция, что $f = 0$ при $|v| \leqslant \frac{1}{2}$ и $f = 1$ при $|v| \geqslant 1$. Положим

$$\tilde{\nabla}^* u = \nabla^* u + f(-\nabla^*\nu < u, \nu > + \nu < u, \nabla^*\nu >).$$

Утверждение 4.1 *Связность $\tilde{\nabla}^*$ согласована с метрикой $<,>$ и удовлетворяет условию $\tilde{\nabla}^*\nu = 0$ при $|v| \geqslant 1$.*

Доказательство. Метрика ∇^* согласована с метрикой $<,>$, поэтому $0 = d1 = d < \nu, \nu >= 2 < \nu, \nabla^*\nu >$. Поэтому при $|v| \geqslant 1$, когда $f = 1$, мы получаем

$$\tilde{\nabla}^*\nu = \nabla^*\nu + (-\nabla^*\nu + \nu < \nu, \nabla^*\nu >) = 0.$$

Чтобы доказать, что связность $\tilde{\nabla}^*$ согласована с метрикой, надо доказать, что для любых сечений s и t верно равенство

$$< \tilde{\nabla}^* s, t > + < s, \tilde{\nabla}^* t >= d < s, t > .$$

Легко доказать из явной формулы для $\tilde{\nabla}^*$, что

$$< \tilde{\nabla}^* s, t > + < s, \tilde{\nabla}^* t >=< \nabla^* s, t > + < s, \nabla^* t >,$$

а так как связность ∇^* согласована с метрикой, то это в точности $d < s, t >$, что и требовалось доказать.

□

Рассмотрим теперь комплексифицированное расслоение $\pi^*\tau_M^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Продолжим евклидову метрику $<,>$ и согласованную с ней связность $\tilde{\nabla}^*$ на расслоении $\pi^*\tau_M^*$ до эрмитовой метрики и согласованной с ней связности на расслоении $\pi^*\tau_M^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Обозначим полученные метрику и связность теми же обозначениями $<,>$ и $\tilde{\nabla}^*$. Конечно же, это злоупотребление нотацией, но это удобно, а из контекста всегда ясно, о каком расслоении, и о какой метрике и связности идёт речь.

Так как $\pi^*\xi^{even} \cong \bigoplus_i \Lambda^{2i}(\tau_M^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$, а $\pi^*\xi^{odd} \cong \bigoplus_i \Lambda^{2i+1}(\tau_M^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$, то из метрики $<,>$ и согласованной с ней связности $\tilde{\nabla}^*$ на $\pi^*\tau_M^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ мы получим метрики и согласованные с ними связности на $\pi^*\xi^{even}$ и $\pi^*\xi^{odd}$, обозначим их снова через $<,>$ и $\tilde{\nabla}^*$.

Теперь мы немного подправим и символ оператора $d + d^*$. Вспомним, что $\sigma_1(d+\delta)(v,x) = \varepsilon_v - i_v$. Пусть $\tilde{\sigma}(x,v) = \varepsilon_{f\nu} - i_{f\nu}$. Заметим, что $\sigma_1(d+\delta)$ и $\tilde{\sigma}$ гомотопны.

Утверждение 4.2 *Если изоморфизмы (вне компактного множества на базе) a и b расслоений η^0 и η^1 гомотопны, то характеры Чженя с компактным носителем $\mathrm{ch}_c[\eta^0, \eta^1, a]$ и $\mathrm{ch}_c[\eta^0, \eta^1, b]$ когомологичны (с компактным носителем!).*

Доказательство. Заметим, что в формуле

$$\mathrm{ch}_c(\eta^0, \eta^1, a) = \mathrm{ch}\,\eta^0 - \mathrm{ch}\,\eta^1$$

изоморфизм a участвует в правой части только следующим образом: характеры Чженя считаются там с использованием согласованных связностей, а согласованность означает, что $\nabla a = 0$. Замена изоморфизма a на гомотопный ему изоморфизм b приводит к непрерывной замене согласованных связностей (см. построение согласованных с изоморфизмом связностей при обсуждении ch_c в одной из прошлых лекций), а когомологический класс (с компактным носителем!) не зависит от такой деформации связности.

$\square$

Таким образом, нам достаточно найти $\mathrm{ch}_c[\pi^*\xi^{even}, \pi^*\xi^{odd}, \tilde{\sigma}]$. Вот здесь нам и пригодятся связности $\tilde{\nabla}^*$.

Утверждение 4.3 *Связности $\tilde{\nabla}^*$ согласованы с $\tilde{\sigma}$ при $|v| \geqslant 1$.*

Доказательство. Напомним, что если есть расслоения η^0 и η^1 со связностями ∇^0 и ∇^1, а также морфизм расслоений $a \in \mathrm{Hom}(\eta^0, \eta^1)$, то ковариантная производная ∇a определяется так:

$$(\nabla a)(s_0) = \nabla^1(as_0) - a\nabla^0 s_0, \quad s_0 \in \Gamma(\eta^0).$$

Согласованность связностей с морфизмом a означает, что $\nabla a = 0$, то есть нам надо доказать, что для любого сечения $w \in \Gamma(\pi^*\xi^{even})$ при $|v| \geqslant 1$ верно равенство

$$\tilde{\nabla}^*[(\varepsilon_{f\nu} - i_{f\nu})w] - (\varepsilon_{f\nu} - i_{f\nu})\tilde{\nabla}^* w = 0.$$

Но это и в самом деле так, потому что при $|v| \geqslant 1$ функция f тождественно равна 1, а $\tilde{\nabla}^*$ определялась так, что $\tilde{\nabla}^*\nu = 0$.

$\square$

5 Характер Чженя с компактным носителем и топологический индекс оператора $d + d^*$: продолжение

Итак, у нас есть согласованная связность. Тогда по утверждению 3.1 мы получаем (с точностью до когомологической эквивалентности)

$$\mathrm{ch}_c[\pi^*\xi^{even}, \pi^*\xi^{odd}, \sigma_1(d+\delta)] = \mathrm{ch}(\pi^*\xi^{even}) - \mathrm{ch}(\pi^*\xi^{odd}) = \prod_{i=1}^{2p}(1 - e^{\tilde{x}_i^*}),$$

где $\tilde{x}_i^*$ образующие У, соответствующие кривизне связности $\tilde{\nabla}^*$ в расслоении $\pi^*\tau_M^* \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Но $\tilde{x}_i^*$ будут в точности $\pm\tilde{y}_j^*$, где $\tilde{y}_j^*$ образующие У, соответствующие кривизне связности $\tilde{\nabla}^*$ в расслоении $\pi^*\tau_M^*$, поэтому мы получим

$$\mathrm{ch}_c[\pi^*\xi^{even}, \pi^*\xi^{odd}, \sigma_1(d+\delta)] = \prod_{i=1}^{2p}(1 - e^{\tilde{x}_i^*}) = \prod_{i=1}^{p}(1 - e^{-\tilde{y}_i^*}) \prod_{i=1}^{p}(1 - e^{\tilde{y}_i^*}).$$

Тогда топологический индекс равен

$$\int\limits_{T^*M} \mathrm{ch}_c[\pi^*\xi^{even}, \pi^*\xi^{odd}, \sigma_1(d+\delta)]\,\mathrm{Td}(M) =$$

$$= \int\limits_{T^*M} \prod_{i=1}^{p}(1 - e^{-\tilde{y}_i^*}) \prod_{i=1}^{p}(1 - e^{\tilde{y}_i^*}) \prod_{i=1}^{p} \frac{y_i}{1 - e^{-y_i}} \prod_{i=1}^{p} \frac{-y_i}{1 - e^{y_i}}.$$

Чтобы упростить это страшненькое на вид выражение, мы сделаем его, на первый взгляд, ещё страшнее: умножим подинтегральное выражение на $\prod \tilde{y}_i^* \prod \frac{1}{\tilde{y}_i^*}$:

$$\int\limits_{T^*M} \prod_{i=1}^{p} \tilde{y}_i^* \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{\tilde{y}_i^*} \prod_{i=1}^{p} (1 - e^{-\tilde{y}_i^*}) \prod_{i=1}^{p} (1 - e^{\tilde{y}_i^*}) \prod_{i=1}^{p} \frac{y_i}{1 - e^{-y_i}} \prod_{i=1}^{p} \frac{-y_i}{1 - e^{y_i}}.$$

В следующих двух лекциях мы узнаем, что $U = \prod\limits_{i=1}^{p} \tilde{y}_i^*$ является так называемой *формой Тома,* обладающей следующим замечательным свойством:

$$\int\limits_{T^*M} U \wedge \alpha = \int\limits_{M} j^* \alpha,$$

где α произвольная $n = 2p$-форма на T^*M, а $j : M \longrightarrow T^*M$ вложение M в кокасательное расслоение нулевым сечением. Мы увидим, что $j^* \tilde{y}_i^* = y_i^*$, поэтому топологический индекс равен

$$\int\limits_{M} \prod_{i=1}^{p} \frac{1}{y_i^*} \prod_{i=1}^{p} (1 - e^{-y_i^*}) \prod_{i=1}^{p} (1 - e^{y_i^*}) \prod_{i=1}^{p} \frac{y_i}{1 - e^{-y_i}} \prod_{i=1}^{p} \frac{-y_i}{1 - e^{y_i}}.$$

Напомним теперь, что $y_i^* = -y_i$, поэтому после сокращений мы получаем, что топологический индекс равен

$$\int\limits_{M} \prod_{i=1}^{p} y_i,$$

а $\prod\limits_{i=1}^{p} y_i$ является классом Эйлера многообразия M, то есть топологический индекс равен интегралу от класса Эйлера $e(M)$.

Вспомним, что в прошлой лекции мы доказали, что аналитический индекс оператора

$$d + d^* : \Gamma(\xi^{even}) \longrightarrow \Gamma(\xi^{odd})$$

равен Эйлеровой характеристике $\chi(M)$ многообразия M. В результате, теорема Атьи-Зингера даёт нам тождество

$$\chi(M) = \int\limits_{M} e(M),$$

которое в случае размерности $\dim M = 2$ превращается (что читатель легко проверит) в классическую теорему Гаусса-Бонне, поэтому мы это тождество тоже называем теоремой Гаусса-Бонне.

6 Что читать?

Наше изложение в данной лекции близко к книге Пале [1] и обзору [2].

Список литературы

[1] Пале Р. Семинар по теореме Атьи-Зингера об индексе.

[2] Федосов Б. В., Теоремы об индексе, *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Том 65.* (Дифференциальные уравнения с частными производными-8). Стр. 165-268.