НМУ, дополнительные главы геометрии.
Домашний экзамен. Выдан 15.12.2005.

Желательно сдать решение в течение 2-х недель, положив его в ячейку с моим именем (А. Пенской) в учебной части. Заметим, что вовсе не обязательно решить всё для отличной оценки: задачи даны с «избытком», среди них есть весьма сложные.

Просьба оперативно сообщать обо всех замеченных опечатках.

Задача 1. Попробуйте найти вещественную и комплексную K-группы для маломерных сфер a) $\mathbb{S}^1$, b) $\mathbb{S}^2$, c) $\mathbb{S}^3$.

Задача 2. Докажите, что для двумерного многообразия класс Тодда $\mathrm{Td}(M)$ равен 1.

Задача 3*. Пусть $A : \Gamma(M, \xi^0) \longrightarrow \Gamma(M, \xi^1)$ эллиптический дифференциальный оператор. Докажите, что если $\mathrm{rk}\,\xi^0 = \mathrm{rk}\,\xi^1 = 1$, а $\dim M > 2$, то индекс A равен нулю.

Задача 4*. В условиях предыдущей задачи заменим $\dim M > 2$ на $\dim M = 2$. Что тогда можно сказать про $\mathrm{ind}\, A$?

Задача 5.

a) Доказать, что алгебра $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^2)$ изоморфна $\mathbb{H}$, и найти $\mathrm{Cl}^{\pm}(\mathbb{R}^2)$.

b) Доказать, что группа $\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^2)$ изоморфна $\mathrm{U}(1) \cong \mathbb{S}^1$,

c) Доказать, что алгебра $\mathrm{Cl}(\mathbb{R}^4)$ изоморфна алгебре 2×2-матриц с кватернионными коэффициентами, и дать описание $\mathrm{Cl}^{\pm}(\mathbb{R}^4)$.

d) Используйте предыдущий пункт, чтобы выяснить, как группа $\mathrm{Spin}(\mathbb{R}^4)$ связана с $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{SU}(2) \cong \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3$.

Задача 6. Пусть M^n многообразие со спинорной структурой, $e_1, \ldots, e_n$ локальный ортонормированый базис, а $\mathbb{D}$ оператор Дирака в спинорном расслоении. Докажите формулу Лихнеровича

$$\mathbb{D}^2 = -[\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} + \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}] + \frac{R}{4},$$

где R — скалярная кривизна многообразия M, а по индексу i подразумевается суммирование. *Указание: удобно воспользоваться геодезическими координатами. Заметим, что выражение в квадратных скобках есть просто квадрат ковариантной производной.*

Задача 7. Выведите из предыдущей задачи, что если многообразие M компактно, а $R \geqslant 0$, причём есть хотя бы одна точка $x_0 \in M$, такая что $R(x_0) > 0$, то ядро $\mathbb{D}$ тривиально, откуда следует, что индекс оператора $\mathbb{D}|_{\Gamma(M,S^+)}$ равен нулю. *Указание: рассмотрите $\int_M (\mathbb{D}s, \mathbb{D}s)\eta$, где η форма объема.*

Задача 8. Найдите символ оператора Дирака $\mathbb{D} : \Gamma(M, S^{\pm}) \longrightarrow \Gamma(M, S^{\mp})$ и докажите, что он является эллиптическим.

Задача 9*. Вычислите топологический индекс оператора Дирака

$$\mathbb{D} : \Gamma(M, S^+) \longrightarrow \Gamma(M, S^-)$$

(то есть выражение в правой части формулы Атьи-Зингера, применённой к данному оператору).

Задача 10. Пусть M компактное риманово многообразие, E эрмитово векторное расслоение над M. Пусть $\varphi \in \Gamma(M, E)$ сечение E, а ∇ согласованная с эрмитовой структура связность в этом расслоении. Рассмотрим функционал

$$S(\varphi, \nabla) = \int_M (|F|^2 + |\nabla\varphi|^2 + m^2|\varphi|^2)\eta,$$

где F кривизна ∇, m некоторая константа («масса»), а η форма объема. Найдите уравнения Эйлера-Лагранжа $\frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial \bar{\varphi}} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial \nabla} = 0$, описывающие систему из массивного комплексного векторного поля и поля Янга-Миллса.