Комплексные числа

Памятка:
$\mathbb{R}$ — вещественные числа.
$\mathbb{C}$ — комплексные числа,
т.е. числа вида $z = a + bi$, где $a, b \in \mathbb{R}$, а $i^2 = -1$.
Числа a и b называются *вещественной* и *мнимой* частями числа z.
$|z|$ — модуль числа $z = a + bi$, $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$.
$\arg z$ — аргумент числа $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$, $\arg z := \varphi$.

1. Найдите $(-i)^2$, i^{10}, $(1+i)^{10}$, $(1-i)^{10}$, $(1+i)^{101}$, $(\sqrt{3}+i)^{30}$.
2. Найдите $z, w \in \mathbb{C}$ такие, что $z + w = z \cdot w = 2$.
3. Вычислите $1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{100}$.
4. Решите уравнения: a) $z^2 = 2$; b) $z^2 = 1 + i$; c) $z^2 + 2z + 2 = 0$.
5. Докажите, что число $(3/5) + (4/5)i$ не является корнем n-ой степени из 1 ни при каком целом положительном n.

Сопряжение

Пусть $z = a + bi$. Число $\overline{z} := a - bi$ называется *сопряженным* числу z.

1. Докажите, что a) $z + \overline{z} \in \mathbb{R}$, b) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, c) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, d) $\overline{z/w} = \overline{z}/\overline{w}$.
2. Найдите $(1+i)/(1-i)$ и $(8+i)/(1+2i)$.
3. Решите уравнение $z^2 = 2i$.
4. Покажите, что если $z \cdot w \in \mathbb{R}$ и $z + w \in \mathbb{R}$ то либо $z = \overline{w}$ либо z и w — действительные числа.

Геометрия комплексной плоскости

1. Покажите, что $|z|^2 = z\overline{z}$, $|zw| = |z| \cdot |w|$.
2. Докажите, что $|z + w| \leq |z| + |w|$. При каких условиях это неравенство обращается в равенство?
3. Найдите геометрическое место точек:
a) $|z| = 1$; b) $|z - 1| = 1$; c) $|z| = |z + 1|$.
4. Найдите действительную и мнимую части числа z^n, где $z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$.
5. Докажите, что точки 0, $1/z$ и $\overline{z}$ лежат на одной прямой.
6. Покажите, что уравнение $z + \overline{z} = z\overline{z}$ задает окружность.
Найдите ее центр и радиус.
7. Нарисуйте множество точек $z \in \mathbb{C}$ таких, что $|z - 3| \leq 2$ и $|z + 4i| \leq 3$.
8. Докажите, что произведение диагоналей четырёхугольника не больше суммы произведений его противоположных сторон. Когда это неравенство обращается в равенство?

Умножение и повороты

1. Доказать, что для любого комплексного a преобразование $z \mapsto az$ увеличивает все расстояния в одно и то же число раз. В какое?

2. Что можно сказать про это преобразование, если число a действительно? …если $|a| = 1$?

3. При каком a это преобразование будет поворотом на 30° вокруг начала координат?

4. Доказать, что преобразование $z \mapsto az$ есть композиция гомотетии с коэффициентом $|a|$ и поворота на угол $\arg a$.

5. Доказать, что преобразование поворота на угла α задаётся формулой $z \mapsto z(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

6. Доказать, что при умножении комплексных чисел модули перемножаются, а аргументы складываются.

7. Доказать, что комплексные числа z, для которых $z^3 = 1$, являются вершинами правильного треугольника.

8. Доказать, что для любого целого $n > 2$ и для любого комплексного a корни уравнения $z^n = a$ являются вершинами правильного n-угольника.

9. Числа 0 и z являются вершинами правильного треугольника. Где может находиться третья его вершина?

10. На сторонах треугольника с вершинами в точках u, v, w построены равносторонние треугольники. Найти формулы для их центров (в виде выражений, содержащих комплексные числа u, v, w). Доказать, что эти центры образуют равносторонний треугольник.

11. Доказать, что сумма всех n корней уравнения $z^n = 1$ равна 0.

Найти произведение всех n корней уравнения $z^n = 1$.

12. При каких a и b преобразование $z \mapsto az+b$ является поворотом? переносом? осевой симметрией?

13. При каких a и b преобразование $z \mapsto a\overline{z} + b$ является осевой симметрией?

14. Доказать, что треугольник с вершинами 0, 1, z подобен треугольику с вершинами 0, 1, $\frac{1}{z}$.

Окружности и прямые

1. Точки x, y, z комплексной плоскости лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда отношение … вещественно. Вставить пропущенное отношение и доказать.

2. Найти геометрическое место точек z для которых число $(z-1)/(z-2)$ — чисто мнимое.

3. Доказать, что точки $z, w, 1/\overline{z}, 1/\overline{w}$ лежат на одной окружности.

4. Доказать, что точка $1/z$ пробегает окружность, когда z движется по прямой $\Re z = 1$.

5. Точки x, y, z, w комплексной плоскости лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда отношение … вещественно. Вставить пропущенное отношение и доказать.

6. Доказать, что уравнение $z\overline{z} + az + \overline{az} + c = 0$, где a — комплексное число, а c — действительное, задат пустое множество (т.е. не имеет решений), прямую или окружность. Как определить по a и c, что именно?

Инверсия

Инверсией относительно окружности с центром 0 и радиусом r называется преобразование, при котором точка X переходит в точку X', лежащую на луче OX, для которой $OX \cdot OX' = r^2$.

1. Какие точки остаются на месте при инверсии? Какие точки никуда не переходят? В какие точки никакая точка не переходит? Что будет, если применить преобразование инверсии дважды?

2. Куда переходит точка z при инверсии с центром 0 и радиусом r? (Ответ включает операцию сопряжения комплексных чисел.)

3. Докажите, что при инверсии любая окружность или прямая переходит в окружность или прямую.

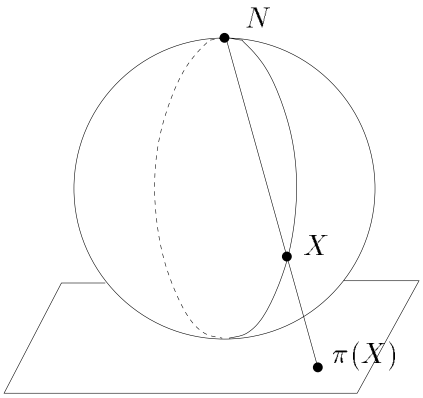
4. Докажите, что при преобразовании $z \mapsto 1/z$ любая окружность или прямая переходит в окружность или прямую.

5. Докажите, что при инверсии касающиеся окружности переходят в касающиеся, и вообще угол, под которым пересекаются две окружности или прямые, не меняется.

Стереографическая проекция

Пусть $\mathbb{R}^3$ — трехмерное пространство с координатами (x, y, t),
S — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$ с центром $(0, 0, 1)$,
$N = (0, 0, 2)$ — северный полюс сферы S.

Точке X сферы S сопоставим точку $\pi(X)$, лежащую в пересечении прямой NX и плоскости $t = 0$. Отображение π называется *Стереографической проекцей.*



1. Пусть $X = (x, y, t)$ — точка сферы S. Запишите $\pi(X)$ в виде комплекксного число $a + bi$, где a и b зависят от x, y и t.

2. Докажите, что стереографическая проекция переводит окружности, лежащие на сфере в окружности или прямые.

3. Докажите, что стереографическая проекция сохраняет углы.