МК НМУ. Геометрия. Листок 2 (15.09.05). Группы

Определение 1. *Группой* называется множество G, элементы которого можно умножать, то есть сопоставлять каждой *упорядоченной* паре элементов a и b из G элемент $ab \in G$ так, что выполнены следующие три свойства:

I. *ассоциативность*: $(ab)c = a(bc)$ для любых элементов $a, b, c \in G$.

II. существование *единицы*: в G существует такой элемент e, что $ae = ea = a$ для каждого $a \in G$.

III. существование *обратного элемента*: для каждого $a \in G$ существует $b \in G$ такой, что $ab = ba = e$ (этот элемент обозначается, как правило, a^{-1} и называется *обратным* к элементу a).

Группа называется *абелевой*, если в ней выполняется еще одно условие: $ab = ba$ для любых $a, b \in G$.

1. Доказать, что множество всех взаимно однозначных отображений произвольного множества X на себя образует группу, если под умножением понимать композицию отображений. Является ли эта группа абелевой? Сколько элементов она имеет, если X конечно и состоит из n элементов (последняя группа называется симметрической порядка n и обозначается S_n)? Образует ли группу множество всех вообще отображений множества на себя?

2. Доказать, что множество всех поворотов правильного n-угольника, переводящих его в себя, образует группу. Каков ее порядок (*порядком* конечной группы называется число ее элементов)?

3. Доказать, что если к предыдущему множеству добавить все отражения n-угольника относительно всех его осей симметрии, то тоже получится группа. Найти ее порядок. Образуют ли группу только эти отражения (без поворотов)? Верно ли, что отражения вместе с композициями отражений образуют группу?

4. Построить аналогичные группы (состоящие из всевозможных симметрий правильной фигуры) для: а) ромба, б) прямоугольника, в) правильной n-угольной пирамиды, г) тетраэдра, д) куба, е) прямоугольного параллелепипеда, не являющегося кубом, ж) октаэдра. Найти их порядки.

5. То же задание для а) икосаэдра, б) додекаэдра.

   Определение 2. *Порядком элемента* a группы G называется наименьшее натуральное число, при котором $a^n = e$. Если такого числа не существует, что говорят, что *a – элемент бесконечного порядка.*

6. Найти порядки всех элементов в группах симметрий правильного треугольника, квадрата, ромба, тетраэдра, куба и октаэдра.

7. Доказать, что если элемент a имеет порядок n, то среди элементов $e, a, a^2, \dots a^{n-1}$ нет одинаковых и что для каждого целого m элемент a^m совпадает с одним из перечисленных. Если же a – элемент бесконечного порядка, то никакие его различные целые степени не совпадают (среди элементов $e, a, a^{-1}, a^2, a^{-2}, \dots$ нет одинаковых).

   Определение 3. Если в группе G существует такой элемент a порядка n, что она исчерпывается элементами $e, a, a^2, \dots a^{n-1}$, то ее называют *конечной циклической группой, порожденной элементом* a, а сам элемент a называется *образующим* этой группы. Группа называется *бесконечной циклической, порожденной элементом* a, если каждый ее элемент есть некоторая степень a, а сам a имеет бесконечный порядок.

8. Среди групп, появлявшихся в предыдущих задачах, найти все циклические. Доказать, что все остатки, которые могут получиться при делении целых чисел на натуральное число n, $n > 1$, с операцией сложения по модулю n (сумма остатков есть остаток суммы) образуют конечную циклическую группу (обозначение – $\mathbb{Z}_n$).

9. Доказать, что множество целых чисел $\mathbb{Z}$ с операцией сложения – бесконечная циклическая группа, и найти все ее образующие. Является ли циклической группа всех четных чисел? Если да, найти ее образующие.

10. Найти все элементы группы вращений правильного 12-угольника, которые могут служить ее образующими.

11. Циклична ли группа (по сложению) комплексных чисел с целыми действительной и мнимой частью?

    Определение 4. Говорят, что группы G_1 и G_2 *изоморфны*, если существует такое взаимно однозначное отображение $f : G_1 \to G_2$, при котором $f(ab) = f(a)f(b)$ для любых $a, b \in G_1$. Изоморфизм группы на себя называется *автоморфизмом.*

12. Есть ли среди следующих групп изоморфные друг другу: 1) группа вращений квадрата; 2) группа симметрий ромба; 3) группа симметрий прямоугольника; 4) $\mathbb{Z}_4$?

13. Доказать, что группа симметрий правильного треугольника изоморфна S_3 (см. задачу 1). Верно ли аналогичное утверждение для квадрата?

14. Доказать, что любая бесконечная циклическая группа изоморфна $\mathbb{Z}$, любая конечная – $\mathbb{Z}_n$.

15. Доказать, что все автоморфизмы произвольной группы образуют группу.

16. Найти все (с точностью до изоморфизма) группы порядков 2, 3, 4 и 5.

    Определение 5. Группа называется *конечно порожденной*, если в ней можно выделить конечное подмножество элементов (называемое системой *образующих*), такое что любой элемент группы может быть записан как произведение некоторого числа образующих или обратных к ним. Например, каждая циклическая группа является конечно порожденной, ее система образующих состоит из одного элемента. Всякая конечная группа, очевидно, конечно порождена.

17. Для групп из задач 3, 4, 5 и 11 найти *минимальные* системы образующих.