Группа дробно-линейных преобразований

Через M обозначим группу дробно-линейных преобразований расширенной комплексной плоскости $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, а через M^+ – её подгруппу, состоящую из преобразований, сохраняющих ориентацию.

1. Доказать, что преобразование $z \to \frac{az+b}{cz+d}$ (или $z \to \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$) обратимо тогда и только тогда, когда $ad - bc \neq 0$. Доказать, что коллекция обратимых дробно-линейных преобразований является группой.

2. Пусть $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Доказать, что $|\gamma(z_1) - \gamma(z_2)| = |ad - bc|\frac{|z_1 - z_2|}{|cz_1+d||cz_2+d|}$ (таким образом γ, сохраняя евклидовы углы, не сохраняет евклидова расстояния).

3. Покажите, что существует единственное $\gamma \in M^+$, переводящее три различных комплексных числа z_0, z_1, z_2 в ∞, 0, 1 соответственно.

4. Укажите явно преобразование из M, переводящее тройку (z_0, z_1, z_2) в тройку (z_0', z_1', z_2').

5. Стереографическая проекция $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ на сферу диаметра 1 в E^3 позволяет перетащить "хордовое расстояние" со сферы на расширенную плоскость. Докажите, что полученная "хордовая" метрика на $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ имеет вид $d(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}$.

6. Преобразование $z \to 1/z$ является хордовой изометрией. Опишите все хордовые изометрии из M^+.

Двойное отношение

Определим двойное отношение четырех точек z_0, z_1, z_2, z_3 из $\widehat{\mathbb{C}}$ по формуле

$$[z_0, z_1, z_2, z_3] = \frac{(z_2 - z_0)}{(z_2 - z_1)} \frac{(z_3 - z_1)}{(z_3 - z_0)}$$

7. Докажите, что если $\gamma \in M^+$, то $[z_0, z_1, z_2, z_3] = [\gamma(z_0), \gamma(z_1), \gamma(z_2), \gamma(z_3)]$.

8. Пусть $\gamma\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ взаимно-однозначное отображение расширенной плоскости, сохраняющее двойное отношение. Докажите, что $\gamma \in M^+$.

9. Четыре точки из $\widehat{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда лежат на одной окружности, когда их двойное отношение является вещественным числом.

Что бывает

10. Может ли группа M поменять местами любые две окружности в $\widehat{\mathbb{C}}$. А группа M^+ ?

11. Может ли группа M^+ перевести пару непересекающихся окружностей в пару концентрических?

12. Рассмотрим в $\widehat{\mathbb{C}}$ две четверки попарно касающихся окружностей. Может ли группа M перевести одну четверку в другую?

13. Может ли группа M реализовать любую перестановку четырех попарно касающихся окружностей в $\widehat{\mathbb{C}}$?

Всё, что есть

14. Доказать, что любое взаимно-однозначное преобразование $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, сохраняющее окружности, углы и ориентацию, имеет вид $\varphi(z) = az + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

15. Доказать, что любое взаимно-однозначное отображение $\varphi\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, сохраняющее окружности, углы и ориентацию, имеет вид $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $ad - bc \neq 0$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$.