Матрицы.

Обозначим множество 2×2 матриц над комплексными числами через $M_2(\mathbb{C}) := \{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | a, b, c, d \in \mathbb{C}\}$.

$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$ — определитель матрицы; $\operatorname{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$ — след матрицы.

Матрица $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ называется единичной матрицей.

На $M_2(\mathbb{C})$ можно ввести операции сложения и умножения:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}.$$

Матрицу можно умножить на вектор: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{pmatrix}$.

1. Пусть $A, B \in M_2(\mathbb{C})$. Верно ли, что $AB = BA$?

2. Докажите, что $M_2(\mathbb{C})$ с операцией сложения является группой. Является ли группой $M_2(\mathbb{C})$ с операцией умножения?

3. Рассмотрим $GL_2(\mathbb{C}) := \{A \in M_2(\mathbb{C}) | \det A \neq 0\}$. Верно ли, что $GL_2(\mathbb{C})$ — группа по сложению? по умножению?

4. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$ и $z \in \mathbb{C}$. Введем операцию $A * z = \frac{az+b}{cz+d}$.
Верно ли, что $AB * z = A * (B * z)$?

Собственным вектором матрицы A с собственным значением $\lambda \in \mathbb{C}$ называется такой вектор $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_i \in \mathbb{C}$, что $Av = \lambda v$.

5. Найдите $\det(A - \lambda E)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ — параметр.

6. Докажите, что λ — собственное значение матрицы A тогда и только тогда, когда λ является корнем уравнения $z^2 - z \operatorname{tr} A + \det A = 0$. Сколько различных собственных значений может быть у матрицы $A \in M_2(\mathbb{C})$?

7. Пусть v и u — собственные векторы матрицы A с собственными значениями λ_1 и λ_2, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Докажите, что тогда u и v линейно независимы над $\mathbb{C}$ (т.е. если $qu + tv = 0$ и $q, t \in \mathbb{C}$, то $q = t = 0$).

8. Сколько линейно независимых собственных векторов матрицы A могут иметь одно и то же собственное значение?

9. Пусть $S \in GL_2(\mathbb{C})$ и $A \in M_2(\mathbb{C})$. Выразите определитель, след и собственные значения матрицы $S^{-1}AS$ через соответствующие значения для A.

10. Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — собственные значения матрицы A. Докажите, что существует матрица S такая, что $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. (Указание: найдите матрицу S такую, что $S \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u$ и $S \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = v$, где u и v — собственные векторы матрицы A с собственными значениями λ_1 и λ_2.)

11. Пусть λ — кратное собственное значение матрицы A, и v — собственный вектор.
a) Найдите $S \in GL_2(\mathbb{C})$ такую, что $Sv = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. b) Докажите, что $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, где $b \in \mathbb{C}$.
c) Докажите, что существует матрица S такая что $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

12. a) Докажите, что $\det AB = \det BA$, $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$.
b) Докажите, что $\operatorname{tr} ABC = \operatorname{tr} BCA$. Верно ли, что $\operatorname{tr} ABC = \operatorname{tr} BAC$?
c) Докажите, что $\operatorname{tr} A_1 A_2 \ldots A_n = \operatorname{tr} A_n A_1 A_2 \ldots A_{n-1}$.