МК НМУ. Геометрия. Листок 5 (06.10.05).
Группы. Смежные классы и действия на множествах

Подмножество H группы G называется *подгруппой*, если оно само является группой относительно умножения, имеющегося в G.

1. Доказать, что H подгруппа G тогда и только тогда, когда (1) $e \in H$ и для всех $g, h \in H$ (2) $gh \in H$; (3) $g^{-1} \in H$. Можно ли утверждать, что одно из условий (1) — (3) является следствием двух других?

2. Рассмотрим группу G и ее подгруппу H. Элементы группы g_1 и g_2 назовем эквивалентными, если $g_1^{-1}g_2 \in H$. Доказать, что такое отношение является отношением эквивалентности и что классы эквивалентности по нему (они называются *левыми смежными классами* группы G по подгруппе H) имеют вид $gH = \{gh : h \in H\}$.

3. Какое отношение эквивалентности на G нужно задать, чтобы разбить ее на *правые смежные классы* по подгруппе H, а именно на подмножества вида $Hg = \{hg : h \in H\}$?

4. Описать правые и левые смежные классы группы симметрий тетраэдра по подгруппе всех а) вращений, б) симметрий, оставляющих на месте одну из его вершин.

5. Описать правые и левые смежные классы группы вращений куба по подгруппе, состоящей из всех вращений, оставляющих на месте а) одну из его граней; б) одну из его вершин.

6. (*Теорема Лагранжа*). Если G конечна, то какова бы ни была ее подгруппа H, $|G| = |G : H||H|$, где через $G : H$ обзначено число левых смежных классов группы G по подгруппе H (равное, к слову, числу правых – доказать! – и обычно называемое *индексом* подгруппы H), а $|A|$, как обычно, означает число элементов конечного множества A.

7. Доказать, что всякая конечная группа простого порядка циклична.

Если в определении изоморфизма групп (см. листок 2) опустить требование взаимной однозначности, получится определение *гомоморфизма. Действием группы G на множестве X* называется любой гомоморфизм $\alpha : G \to S(X)$, где $S(X)$ – группа всех взаимно однозначных отображений множества X на себя. Значение биекции $\alpha(g)$ на элементе $x \in X$ обозначается через $\alpha(g)x$ или даже просто gx, если не возникает путаницы. Если G есть некоторая группа преобразований (т. е. подгруппа $S(X)$), автоматически определено ее действие на X, осуществляемое тождественным гомоморфизмом $id : G \to S(X), id(g) = g$. Назовем это действие тавтологическим.

8. Доказать, что (1) $ex = x$ и (2) $(gh)x = g(hx)$ для каждого $x \in X$ и $g, h \in G$ (e, как всегда, обозначает единицу группы G). Доказать также, что если мы научились каким бы то ни было образом умножать (слева) элементы множества X на элементы группы G так, что выполнены условия (1) и (2), то, тем самым, задали действие G на X.

9. Доказать, что следующие формулы определяют действия группы на самой себе: а) $l(g)x = gx$ (т. н. *левые сдвиги*); б) $r(g)x = xg^{-1}$ (*правые сдвиги*); в) $a(g) = gxg^{-1}$ (*внутренние автоморфизмы* или *сопряжения*).

Орбитой элемента $x \in X$ называется подмножество $X \supset Gx = \{gx : g \in G\}$. *Стабилизатором* элемента x называется $G_x = \{g : gx = x\}$.

10. Доказать, что стабилизатор является подгруппой, более того – если x_1 и x_2 принадлежат одной и той же орбите, то их стабилизаторы G_{x_1} и G_{x_2} *сопряжены* (т. е. найдется $g \in G$, такой что $G_{x_1} = gG_{x_2}g^{-1}$ ($gHg^{-1} = \{ghg^{-1} : h \in H\}$).

11. Построить биекцию между орбитой Gx и множеством левых смежных классов G/G_x. Что можно сказать о числе элементов орбиты, если группа G конечна?

12. Рассмотрим тавтологическое действие группы вращений куба на множестве его вершин (ведь вращение куба можно интерпретировать, как некоторую перестановку его вершин!) Найти орбиты и стабилизаторы вершин куба при таком действии.

13. Решить задачу, аналогичную предыдущей, для действий на множестве вершин групп вращений и симметрий а) тетраэдра, б) октаэдра, в) икосаэдра, г) додекаэдра; д) правильной n-угольной пирамиды.

14. Тавтологические действия, исследованные в двух предыдущих задачах, индуцируют действия на ребрах, гранях, диагоналях граней и т. д. рассматриваемых объектов (например, если ребро куба рассматривать как пару вершин, то вращение куба может быть интерпретировано, как некоторая перестановка ребер). Найти орбиту и стабилизатор ребра куба при таком действии на множестве его ребер группы а) его вращений; б) его симметрий.

15. Решить подобную задачу для а) грани; б) диагонали; в) диагонали грани; в) пары противоположных ребер; г) пары противоположных граней куба.

16. То же для а) ребра; б) грани; в) пары противоположных ребер; г) пары противоположных граней октаэдра.

17. Описать классы сопряженных элементов (т. е. орбиты при действии внутренними автоморфизмами группы на себе из задачи 9.в) в группах вращений и симметрий а) тетраэдра; б) куба; в) октаэдра.

18. Пусть конечная группа G действует на конечном множестве X. Доказать, что число различных орбит элементов этого действия равно $\frac{1}{|G|}\sum\limits_{g \in G} |X^g|$, где $X^g = \{x \in X : gx = x\}$ – множество непожвижных точек элемента $g \in G$.

19. Найти число существенно различных раскрасок граней куба в а) 2 цвета; б) 3 цвета; в) 6 цветов (раскраски считаются существенно различными, если они не переходят друг в друга при вращениях куба).