Площадь треугольника.

Обозначим за t площадь треугольника с нулевыми углами.
Пусть $f(\varphi)$ – площадь треугольника с углами $(\pi-\varphi,\ 0{,}0)$.

1. Докажите, что $f(\varphi)+f(\psi)=f(\varphi+\psi)$. Выведите отсюда, что $f(\varphi)=\frac{\varphi}{\pi}t$.

2. Докажите, что $S_{ABC}=\frac{\pi-(\angle A+\angle B+\angle C)}{\pi}t$.
(Указание: разбейте треугольник с нулевыми углами на треугольник ABC и треугольники с двумя нулевыми углами).

Факт: $t=\pi$. (Это можно доказать, вычислив интеграл $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty}\frac{1}{y^2}\,dy$.)
Таким образом, доказана формула площади треугольника:

$$S_{ABC}=\pi-(\angle A+\angle B+\angle C).$$

Формулы

3. Получите следующие соотношения в прямоугольном треугольнике ABC (где $\angle C=\frac{\pi}{2}$):

a) $\operatorname{ch} c=\operatorname{ch} a\operatorname{ch} b$;
b) $\operatorname{sh} b=\operatorname{sh} c\sin B$;
c) $\operatorname{th} a=\operatorname{th} c\cos B$;
d) $\operatorname{ch} c=\operatorname{ctg} A\operatorname{ctg} B$;
e) $\cos A=\operatorname{ch} a\sin B$;
f) $\operatorname{th} a=\operatorname{sh} b\operatorname{tg} A$.

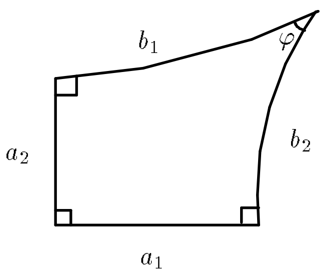
4. Пусть a, b, c — стороны треугольника с противолежащими углами A, B, C. Докажите
a) *первую теорему косинусов*: $\operatorname{ch} a=\operatorname{ch} b\operatorname{ch} c-\operatorname{sh} a\operatorname{sh} c\cos A$;
b) *теорему синусов*: $\frac{\sin A}{\operatorname{sh} a}=\frac{\sin B}{\operatorname{sh} b}=\frac{\sin C}{\operatorname{sh} c}$;
c) *вторую теорему косинусов*: $\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\operatorname{ch} a$.

5. Если S — площадь треугольника со сторонами a, b и c, то

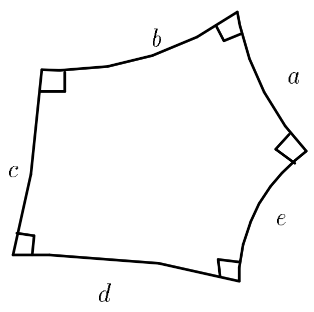
$$\operatorname{th}^2\frac{S}{4}=\operatorname{th}\frac{p}{2}th\frac{p-a}{2}\operatorname{th}\frac{p-b}{2}\operatorname{th}\frac{p-c}{2},$$

где $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

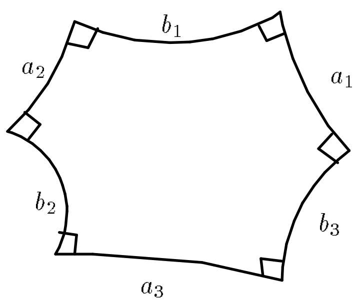
6. Докажите следующие соотношения в четырех-, пяти- и шестиугольниках:



a) $\operatorname{sh} a_1\operatorname{sh} a_2=\cos\varphi$
b) $\operatorname{ch} a_1=\operatorname{ch} b_1\sin\varphi$



c) $\operatorname{th} a\operatorname{ch} b\operatorname{th} c=1$
d) $\operatorname{sh} a\operatorname{sh} b=\operatorname{ch} d$



e) $\frac{\operatorname{sh} a_1}{\operatorname{sh} b_1}=\frac{\operatorname{sh} a_2}{\operatorname{sh} b_2}=\frac{\operatorname{sh} a_3}{\operatorname{sh} b_3}$
f) $\operatorname{ch} b_1\operatorname{sh} a_2\operatorname{sh} a_3=\operatorname{ch} a_1+\operatorname{ch} a_2\operatorname{ch} a_3$