3.11.05

Листок №8

Гиперболическая геометрия

1. Найти длину гиперболической окружности радиуса r.

2. Найти площадь гиперболического диска радиуса r.

3. Пусть $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$ – углы гиперболического треугольника $T(t)$ со сторонами (at, bt, ct). Доказать, что любой из углов треугольника $T(t)$ монотонно убывает с ростом t.

4. Пусть x точка на стороне BC гиперболического треугольника ABC. Тогда на одной из сторон AB или AC найдется такая точка y, что расстояние $d(x,y) \leq \ln(1+\sqrt{2})$.

5. Доказать, что площадь гиперболического треугольника меньше его периметра.

Геометрия Мебиуса

6. Пусть $D \subset E$ пара концентрических дисков, а γ – такое дробно-линейное преобразование, что $\gamma(D) \subset \gamma(E)$ и $\infty \notin \gamma(E)$. Доказать, что $\frac{diam\gamma(E)}{diam\gamma(D)} \geq \frac{diam E}{diam D} > 1$.

7. Доказать, что группа Möb $(\widehat{\mathbb{C}})$ порождается отражениями.

8. Пусть r_1 и r_2 отражения в группе Möb$(\widehat{\mathbb{C}})$ с зеркалами C_1 и C_2 соответственно. Определить тип элемента $\gamma = r_1 \cdot r_2$ (рассмотреть три случая: зеркала пересекаются, касаются, непересекаются). Как геометрически найти неподвижные точки γ.

Тройки Маркова

9. Пусть A и $B \in SL_2(\mathbb{C})$. Доказать, что
$tr(ABA^{-1}B^{-1}) = (trA)^2 + (trB)^2 + (trAB)^2 - trAtrB \cdot trAB - 2$. В частности, если
$tr(ABA^{-1}B^{-1}) = -2$, то тройка чисел $trA, trB, trAB$ удовлетворяет уравнению
$x^2 + y^2 + z^2 = xyz$ (1)
Выбрав $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, получим целочисленное решение $(3,3,3)$ уравнения (1).
Такое решение называется тройкой А.А. Маркова. Используя матричный метод, найдите ещё две, три, четыре, …тройки А.А. Маркова.