Гомологическая алгебра, листок 2

1. Приведите примеры некоммутативных колец, над которыми всякий модуль инъективен.

2. Покажите, что всякий ограниченный сверху ацикличный комплекс проективных модулей стягиваем; что всякий ограниченный снизу комплекс инъективных модулей стягиваем.

3. Путь m — натуральное число. Покажите, что всякий конечно порожденный проективный $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-модуль свободен тогда и только тогда, когда m является степенью простого числа.

4. Покажите, что прямая сумма (возможно, бесконечная) инъективных модулей над нётеровым кольцом инъективна.

5. Пусть A — коммутативное целостное кольцо, K — его поле частных. Докажите, что K является инъективным A-модулем.

6. Подсчитайте $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(A, B)$ для произвольных конечно порожденных абелевых групп A и B.

7. Пусть k — поле, $A = k[\varepsilon]/(\varepsilon^2)$. Будем рассматривать k как A-модуль, на котором ε действует нулем. Подсчитайте $\mathrm{Ext}^i(k, A)$ и $\mathrm{Ext}^i(k, k)$ для всех i.

Для домашнего чтения:

Инъективная оболочка (Бурбаки «Гомологическая алгебра», § 1. пп. 9–10).

Структура инъективных модулей над нётеровыми кольцами (Бурбаки «Гомологическая алгебра», § 1, упр. 27 и сл.)