1. Покажите, что: а) A-модуль X будет проективен тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ext}^1_A(X, M) = 0$ для всех M; б) A-модуль X будет инъективен тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ext}^1_A(M, X) = 0$ для всех M.

2. а) Покажите, что $\mathrm{Ext}^i(X, M) = 0$ при всех $i > n$ тогда и только тогда, когда X обладает проективной резольвентой длины $\leqslant n$. Минимум таких n называется *проективной размерностью* модуля M (обозначение: $\mathrm{pd}(M)$).

б) Покажите, что $\mathrm{Ext}^i(M, X) = 0$ при всех $i > n$ тогда и только тогда, когда X обладает инъективной резольвентой длины $\leqslant n$. Минимум таких n называется *инъективной размерностью* модуля M (обозначение: $\mathrm{id}(M)$).

3. Пусть

$$0 \to M'' \to M \to M' \to 0$$

— точная последовательность. Оцените проективную размерность каждого из трех модулей через размерности двух других.

Число $\mathrm{gl.dim}(A) = \sup \mathrm{id}(M) = \sup \mathrm{pd}(M)$, где супремум берется по всем A-модулям, называется *глобальной размерностью* кольца.

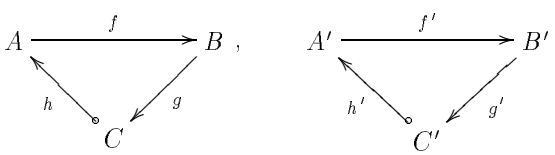
4. Покажите, что $\mathrm{gl.dim}(A) = 0$ тогда и только тогда, когда A полупросто (т. е. изоморфно конечному прямому произведению матричных алгебр над телами).

5. Кольцо A верхнетреугольных 2×2-матриц с вещественными элементами полупростым не является, так что существуют два A-модуля M и N, для которых $\mathrm{Ext}^1_A(M, N) \neq 0$. Приведите конкретный пример.

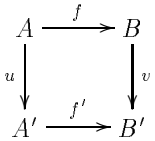
6. Покажите, что три следующих условия на кольцо A эквивалентны: (а) $\mathrm{gl.dim}(A) \leqslant 1$; (б) всякий подмодуль проективного A-модуля проективен; (в) если $L^{\cdot}$ — комплекс проективных A-модулей, то существует квазиизоморфизм $L^{\cdot} \to M^{\cdot}$, где $M^{\cdot}$ — комплекс с нулевым дифференциалом.

7. Покажите, что всякая делимая абелева группа есть прямая сумма групп, изоморфных $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ (для незнакомых с p-адическими числами: $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ изоморфна группе корней из единицы всевозможных степеней p^n, где p — фиксированное простое число, а n произвольно).

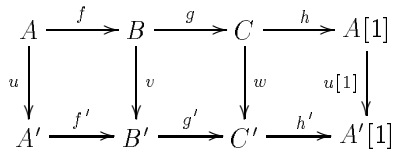
8. Пусть



— отмеченные треугольники и



коммутативная диаграмма. Покажите, что морфизм $C \xrightarrow{w} C'$, делающий диаграмму



коммутативной, может быть не единственным даже с точностью до гомотопии.