Гомологическая алгебра, листок 4

1. Пусть k — поле, A — внешняя алгебра над k от двух переменных (она порождена образующими ξ и η и соотношениями $\xi^2 = \eta^2 = \xi\eta + \eta\xi = 0$). Найдите $\operatorname{Ext}^i_A(k,k)$, где ξ и η действуют на k нулем.

2. а) Покажите, что $\operatorname{gl.dim}(A) \leqslant 1$ тогда и только тогда, когда всякий левый идеал в A является проективным A-модулем.

б) Покажите, что всякое кольцо главных идеалов имеет глобальную размерность 1.

в) Покажите, что кольцо верхнетреугольных 2×2-матриц с коэффициентами из данного поля k имеет глобальную размерность 1.

3. Пусть $\operatorname{gl.dim}(A) \leqslant 1$, и пусть $L^{\cdot}$ — ограниченный сверху комплекс проективных A-модулей, а M — произвольный A-модуль. Покажите, что

$$H^i(\operatorname{Hom}(L^{\cdot}, M)) \simeq \operatorname{Hom}_A(H^i(L^{\cdot}), M) \oplus \operatorname{Ext}^1_A(H^{i-1}(L^{\cdot}), M)$$

(«теорема об универсальных коэффициентах»).

4. Сформулируйте и докажите аналог теоремы об универсальных коэффициентах, в котором Hom заменен на тензорное произведение.

5. Пусть по-прежнему $\operatorname{gl.dim}(A) \leqslant 1$, и пусть $L^{\cdot}, M^{\cdot}$ — ограниченные сверху комплексы проективных A-модулей. Покажите, что

$$H^n(L^{\cdot} \otimes M^{\cdot}) \simeq \bigoplus_{i+j=n} H^i(L^{\cdot}) \otimes H^j(M^{\cdot}) \oplus \bigoplus_{i+j=n-1} \operatorname{Tor}^A_1(H^i(L^{\cdot}), H^j(M^{\cdot}))$$

(«формула Кюннета»).

6. Пусть $f\colon K^{\cdot} \to L^{\cdot}$ — морфизм комплексов. Покажите, что следующие два условия эквивалентны:

а) существует квазиизоморфизм $s\colon \bar{K}^{\cdot} \to K^{\cdot}$, для которого $fs \sim 0$;

б) существует квазиизоморфизм $t\colon L^{\cdot} \to \bar{L}^{\cdot}$, для которого $tf \sim 0$.

Знак $\sim$ означает «гомотопно».