Гомологическая алгебра, листок 5

1. Пусть k — поле, $A = k[X, Y]$ и k — модуль над A, на котором X и Y действуют нулем. Вычислите $\mathrm{Ext}^i_A(k, A)$ для всех i.

2. Покажите, что всякий копредел точен справа, и приведите пример, когда для копредела нарушается точность слева.

3. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

называется *кодекартовым квадратом*, если D в ней является копределом диаграммы, состоящей из A, B и C. Покажите, что если в кодекартовом квадрате морфизм f инъективен, то и g инъективен.

4. Дайте определение декартова квадрата; сформулируйте и докажите для него утверждение, являющееся аналогом результата предыдущей задачи.

5. Сколько, с точностью до изоморфизма, существует абелевых групп A, которые могут быть включены в точную последовательность

$$0 \to \mathbb{Z} \to A \to \mathbb{Z}/6000\mathbb{Z} \to 0?$$

6. Для модуля M обозначим через $\Delta_M : M \to M \oplus M$ отображение $x \mapsto (x, x)$, а через $\nabla_M : M \oplus M \to M$ — отображение $(x, y) \mapsto x + y$. Пусть

$$0 \to B \to X \to A \to 0 \tag{$*$}$$

и

$$0 \to B \to Y \to A \to 0 \tag{$**$}$$

два расширения A с помощью B. Рассмотрим их прямую сумму

$$0 \to B \oplus B \to X \oplus Y \to A \oplus A \to 0. \tag{ξ}$$

Покажите, что фундаментальный класс расширения $(\Delta_A)^*(\nabla_B)_*\xi$ равен, как элемент группы $\mathrm{Ext}^1(A, B)$, сумме фундаментальных классов расширений $(*)$ и $(**)$.