Экзамен по гомологической алгебре
Работы сдавать в учебную часть до 26 декабря включительно

1. Пусть $A = \mathbb{Z}[T]/(T^n - 1)$; рассмотрим $\mathbb{Z}$ как A-модуль, на котором T действует тривиально (как тождественное отображение). Посчитайте $\mathrm{Ext}^i_A(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ для всех $i \geqslant 0$.

2. Пусть $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ и M — конечно порожденный градуированный плоский R-модуль. Покажите, что M изоморфен конечной прямой сумме модулей вида $R(d_i)$ ($d_i \in \mathbb{Z}$).

3. Пусть $C \subset \mathbb{P}^3$ — множество точек с однородными координатами $(u^3 : u^2v : uv^2 : v^3)$ и $I \subset R = k[X_0, X_1, X_2, X_3]$ — идеал, порожденный однородными многочленами, тождественно обращающимися в нуль на C. Опишите минимальную резольвенту R-модуля R/I.

4. Покажите, что всякая делимая абелева группа изоморфна прямой сумме групп, изоморфных $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ (группа $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ изоморфна группе корней из единицы всевозможных степеней p^n, где p — фиксированное простое число).

5. Пусть $f\colon K^{\cdot} \to L^{\cdot}$ — морфизм комплексов. Покажите, что следующие два условия эквивалентны:

а) существует квазиизоморфизм $s\colon K_1^{\cdot} \to K$, для которого fs гомотопно нулю;

б) существует квазиизоморфизм $t\colon L^{\cdot} \to L_1^{\cdot}$, для которого tf гомотопно нулю.