ЗАДАНИЕ 1

$GL_N(\mathbb{C}),\ SL_N(\mathbb{C}),\ U_N$

Обозначим $GL_n(\mathbb{C})$ группу невырожденных операторов из $\mathbb{C}^n$ в себя с композицией в качестве операции. Пусть $gl_n(\mathbb{C})$ — алгебра Ли операторов из $\mathbb{C}^n$ в себя со стандартным сложением и скобкой $[A,B]=AB-BA$.
Задача 1. Докажите, что $GL_n(\mathbb{C})$ является группой Ли, $gl_n(\mathbb{C})$ - её алгеброй Ли, а матричная экспонента - экспоненциальным отображением из $gl_n(\mathbb{C})$ в $GL_n(\mathbb{C})$. Что будет образом экспоненциального отображения? Постройте подмножество $gl_n(\mathbb{C})$, задающее при экспоненциальном отображении карту окрестности единицы.

Обозначим $SL_n(\mathbb{C})$ подгруппу $GL_n(\mathbb{C})$, состоящую из операторов с единичным определителем.
Задача 2. Докажите, что $SL_n(\mathbb{C})$ является подгруппой Ли в $GL_n(\mathbb{C})$, опишите её алгебру ли $sl_n(\mathbb{C}) \subset gl_n(\mathbb{C})$. Постройте базис $sl_n(\mathbb{C})$, выпишите скобку в этом базисе. Что будет образом экспоненциального отображения? Постройте подмножество $sl_n(\mathbb{C})$, задающее при экспоненциальном отображении карту окрестности единицы.

Пусть теперь в $\mathbb{C}^n$ задано эрмитово скалярное произведение. Обозначим U_n подгруппу $GL_n(\mathbb{C})$, состоящую из унитарных операторов. Обозначим SU_n подгруппу U_n, состоящую из операторов с единичным определителем.
Задача 3. Докажите, что U_n и SU_n являются подгруппами Ли в $GL_n(\mathbb{C})$, опишите их алгебры Ли u_n, $su_n \subset gl_n(\mathbb{C})$. Постройте базис u_n и su_n, выпишите скобку в этом базисе. Что будет образом экспоненциального отображения? Постройте подмножества u_n, su_n, задающие при экспоненциальном отображении карту окрестности единицы.

Задача 4. Найдите коммутант и центр $GL_n(\mathbb{C})$, $SL_n(\mathbb{C})$, U_n и SU_n, а также коммутант и центр их алгебр Ли.

Задача 5. Докажите, что комплексификация алгебр Ли u_n и su_n изоморфна $gl_n(\mathbb{C})$ и $sl_n(\mathbb{C})$ соответственно, где последние рассматриваются как алгебры Ли над полем $\mathbb{C}$.

Задача 6. Докажите, что алгебра Ли $sl_n(\mathbb{C})$ — проста (как алгебра Ли над полем $\mathbb{C}$), то есть не содержит нетривиальных идеалов. Выведите отсюда, что su_n — проста (как алгебра Ли над полем $\mathbb{R}$).

Задача 7. Докажите, что любая комплексная матрица однозначно раскладывается в произведение унитарной матрицы и верхнетреугольной с неотрицательными вещественными числами на диагонали. Выведите отсюда, что $GL_n(\mathbb{C})$ и $SL_n(\mathbb{C})$ гомотопически эквивалентны U_n и SU_n соответственно.

Задача 8. Постройте изоморфизм между SU_2 и группой кватернионов с единичной нормой (по умножению).

Задача 9. Докажите, что $U_n/U_{n-1} \cong SU_n/SU_{n-1} \cong S^{2n-1}$. Выведите отсюда, что U_n и SU_n — связны, и что SU_n — односвязна, а U_n имеет фундаментальную группу $\mathbb{Z}$.

Для подмножества $I=\{i_1<\cdots<i_r\}\subset\{1,\ldots n\}$ назовём *флагом* в $\mathbb{C}^n$ набор вложенных подпространств

$$0\subset V_{i_1}\subset V_{i_2}\subset\cdots\subset V_{i_r}\subset\mathbb{C}^n, \qquad \dim V_i = i.$$

Задача 10. Убедитесь, что для заданного I множество флагов является однородным пространством как для $SL_n(\mathbb{C})$, так и для SU_n. Опишите индуцированную топологию в геометрических терминах. Какие матрицы стабилизируют флаг, в котором V_{i_j} порождено координатными векторами $e_1, e_2 \ldots e_{i_j}$ для $j = 1\ldots r$? Какие из этих матриц унитарны?